Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Keilkalkül – Lösungen

Aufgabe 1 (Holzfällerbasiswissen* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Seien a, b, c, d positive Zahlen. Zeige die folgenden Eigenschaften von Keilwinkeln:

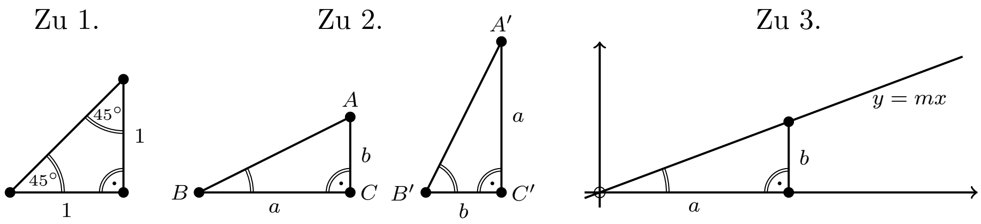
1. Es gilt $\sphericalangle(1,1) = 45°$.
2. Es gilt $\sphericalangle(a,b) = 90° - \sphericalangle(b,a)$.
3. Es gilt genau dann $\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(c,d)$, wenn $a/b = c/d$.

Lösung. *Zu 1.* Der $(1,1)$-Keil ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck. Wir folgern mit der Innenwinkelsumme im Dreieck, dass die beiden Basiswinkel jeweils $(180° - 90°)/2$ betragen. Das bedeutet $\sphericalangle(1,1) = 45°$.

Zu 2. Der (a,b)-Keil und der (b,a)-Keil stimmen im $90°$-Winkel überein sowie in den Längen a, b der beiden Katheten. Somit sind sie nach dem SWS-Satz zueinander kongruente Dreiecke und enthalten jeweils die drei Winkel $90°$, $\sphericalangle(a,b)$, $\sphericalangle(b,a)$. Die Innenwinkelsumme im Dreieck liefert nun

$$\sphericalangle(a,b) = 180° - 90° - \sphericalangle(b,a) = 90° - \sphericalangle(b,a).$$

Zu 3. Wir fassen den (a,b)- bzw. (c,d)-Keil jeweils als Steigungsdreieck einer Ursprungsgerade in einem ebenen Koordinatensystem auf. Es ist klar, dass zwei Ursprungsgeraden genau dann übereinstimmen, wenn sie die gleiche Steigung haben. Außerdem ist eine Ursprungsgerade eindeutig festgelegt durch den spitzen Winkel, den sie mit der nicht-negativen x-Achse einschließt. Damit können wir schließen, dass die Steigungen b/a und d/c genau dann gleich sind, wenn die Winkel der entsprechenden Steigungsdreiecke übereinstimmen. Weil $b/a = d/c$ gleichbedeutend ist mit $a/b = c/d$, zeigt das die Behauptung.



$\Delta ABC \cong \Delta B'A'C'$ $\qquad$ $m = b/a$

Aufgabe 2 (Kombinationskeil* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Ein kurzer Blick auf den ersten Arkusbaum und schon ist für Waldi klar, dass hier ein $45°$-Keil gefragt ist. Nach Durchwühlen seiner Kiste muss er jedoch entsetzt feststellen, dass er weder seinen treuen $(1,1)$-Keil noch sonst irgendeinen $45°$-Keil dabei hat! Nachdenklich starrt Waldi auf den $(2,1)$-Keil und den $(3,1)$-Keil in seiner Kiste. „Hmmm, das müsste doch in etwa hinkommen...“, murmelt er vor sich hin und legt den $(2,1)$-Keil auf den umgedrehten $(3,1)$-Keil. Er kann sein Glück kaum fassen, als er erkennt, dass sich die beiden Keilwinkel genau zu $45°$ ergänzen! Damit hat er einen geeigneten Ersatz gefunden. Um der Sache auf den Grund zu gehen, kritzelt er untenstehende Skizze 1 in sein Notizheft.

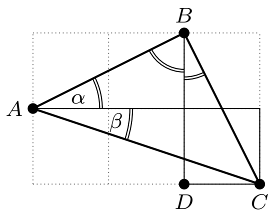
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

1. Beweise anhand dieser Skizze die Formel $\sphericalangle(1,1) = \sphericalangle(2,1) + \sphericalangle(3,1)$.
2. Zeige anschließend auf ähnliche Weise, dass auch gilt $\sphericalangle(1,1) = \sphericalangle(3,2) + \sphericalangle(5,1)$.

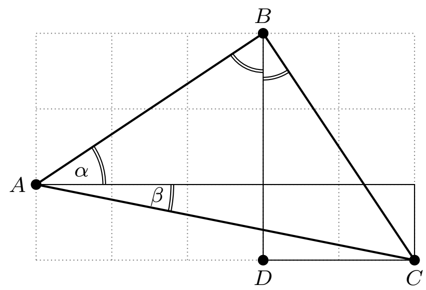
Lösung. *Zu 1.* Wir ergänzen Skizze 1 um einige Notationen und erhalten das untenstehende linke Bild. Es wird sofort klar, dass α der Winkel eines $(2,1)$-Keils ist. Der Winkel $\sphericalangle ABD$ ist ein Komplementärwinkel zu α, d. h. er ergänzt sich mit α zu $90°$. Weiterhin ist β der Winkel eines auf dem Kopf stehenden $(3,1)$-Keils. Wir beobachten nun, dass das Dreieck ΔBCD auch ein $(2,1)$-Keil ist und demnach $\sphericalangle DBC = \alpha$, womit wir schließen können, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig bei B ist. Außerdem ist das Dreieck gleichschenklig, da die Seiten $[AB]$ und $[BC]$ jeweils die Hypotenuse eines $(2,1)$-Keils sind. Es folgt

$$\sphericalangle(1,1) = 45° = \alpha + \beta = \sphericalangle(2,1) + \sphericalangle(3,1).$$

Zu 2. Wir können auf exakt dieselbe Weise die Formel $\sphericalangle(1,1) = \sphericalangle(3,2) + \sphericalangle(5,1)$ zeigen, indem wir das untenstehende rechte Bild betrachten und in obiger Argumentation $(2,1)$ bzw. $(3,1)$ ersetzen durch $(3,2)$ bzw. $(5,1)$.



$\alpha = \sphericalangle(2,1)$, $\beta = \sphericalangle(3,1)$



$\alpha = \sphericalangle(3,2)$, $\beta = \sphericalangle(5,1)$

Aufgabe 3 (Keilloses Durcheinander* [4 Punkte]). Beim nächsten Arkusbaum angekommen, stellt unser Holzfäller fest, dass der benötigte Winkel für den Keil genau $30°$ beträgt. Prompt winkt Waldi ab: „Das geht mit meinen Keilen leider nicht, da muss sich schon einer meiner irrationalen Kollegen drum kümmern!“. Bestätige ihn, indem Du beweist, dass es keinen natürlichen (a,b)-Keil gibt mit $\sphericalangle(a,b) = 30°$.

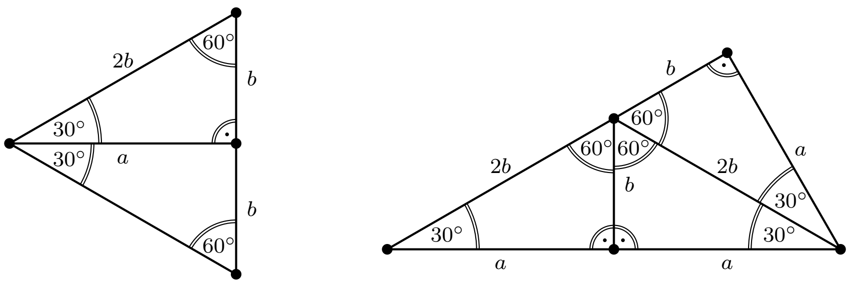
Hinweis. Nimm an es gäbe so einen (a,b)-Keil. Welches besondere Dreieck entsteht, wenn Du zwei solcher Keile geeignet aneinanderlegst? Du darfst bis Klasse 8 ohne Beweis verwenden, dass es keine positiven natürlichen Zahlen a, b gibt mit $a^2 = 3b^2$. Ab Klasse 9 solltest Du auch das sauber begründen!

Lösung. Angenommen es gäbe einen natürlichen (a,b)-Keil mit $\sphericalangle(a,b) = 30°$. Wir legen zwei solcher Keile entlang der Katheten mit Länge a zusammen und erhalten ein

Dreieck, in dem alle Innenwinkel 60° betragen, siehe das Bild unten. Das bedeutet, es ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $2b$. Wenden wir nun den Satz des Pythagoras auf einen der beiden Keile an, erhalten wir $a^2 + b^2 = (2b)^2$, was sich zu $a^2 = 3b^2$ vereinfacht.

Alternativ kann man diese Gleichung $a^2 = 3b^2$ auch erhalten, indem man aus drei (a, b)-Keilen einen neuen, größeren 30°-Keil zusammenbaut, siehe die untenstehende rechte Skizze. Dann folgt mit Aufgabe 1.3, dass $\frac{a}{b} = \frac{3b}{a}$. Dies liefert $a^2 = 3b^2$.

Diese Gleichung kann aber für positive natürliche Zahlen a, b nicht stimmen! In der Primfaktorzerlegung von a^2 taucht der Faktor 3 genau doppelt so oft auf wie in der Primfaktorzerlegung von a. Insbesondere ist die Anzahl des Faktors 3 in a^2 gerade. Ebenso ist die Anzahl des Faktors 3 in b^2 gerade. Nun haben wir aber in unserer Gleichung $a^2 = 3b^2$ auf der linken Seite eine gerade Anzahl des Faktors 3, während dessen Anzahl auf der rechten Seite ungerade ist. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zeigt, dass dies nicht möglich ist. Also haben wir unsere Annahme zu einen Widerspruch geführt und damit bewiesen, dass es keinen natürlichen (a, b)-Keil mit $\sphericalangle(a, b) = 30^\circ$ gibt.



Hinweis. Der obige Beweis zeigt, dass die Zahl $\sqrt{3}$ irrational ist, d. h. sie kann nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden.

Es folgt aus Aufgabe 4, dass Waldi auch mit einer Kombination von endlich vielen natürlichen Keilen nicht in der Lage ist, einen Winkel von exakt 30° zu erhalten.

Aufgabe 4 (Verbinden und Zerlegen** [4 Punkte]). Beflügelt von seiner Entdeckung aus Aufgabe 2 untersucht Waldi, wie sich zwei Keilwinkel zu einem neuen Keilwinkel zusammenfügen. Hier ist, was er herausgefunden hat: Seien r, s beliebige positive Zahlen mit $rs > 1$. Dann gilt

$$\sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1) = \sphericalangle(rs - 1, r + s).$$

Löse mithilfe dieser Formel folgende Probleme:

1. Zeige, dass die Summe der Winkel von natürlichen (a, b)- und (c, d)-Keilen mit $ac > bd$ wieder der Winkel eines natürlichen Keils ist!
2. Stelle jeden der beiden Winkel $\sphericalangle(3, 2)$ und $\sphericalangle(4, 3)$ jeweils auf zwei verschiedene Arten als Summe von Winkeln zweier natürlicher Keile dar!

Lösung. *Zu 1.* Wir betrachten natürliche (a, b)- und (c, d)-Keile mit $ac > bd$. Setze nun $r := a/b$ und $s := c/d$. Dann gilt $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(r, 1)$ und $\sphericalangle(c, d) = \sphericalangle(s, 1)$. Wegen $rs = \frac{ac}{bd} > 1$ können wir die Summenformel anwenden und wir erhalten

$$\sphericalangle(a, b) + \sphericalangle(c, d) = \sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1) = \sphericalangle(rs - 1, r + s).$$

Es gilt $rs - 1 = \frac{ac}{bd} - 1 = \frac{ac-bd}{bd}$ und $r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Damit folgern wir

$$\sphericalangle(rs - 1, r + s) = \sphericalangle(bd(rs - 1), bd(r + s)) = \sphericalangle(ac - bd, ad + bc).$$

Insgesamt liefert uns das die Formel $\sphericalangle(a, b) + \sphericalangle(c, d) = \sphericalangle(ac - bd, ad + bc)$, womit wir sehen, dass die Summe der beiden Keilwinkel wieder der Winkel eines natürlichen Keils ist.

Zu 2. Wir wollen den Winkel $\sphericalangle(3, 2)$ als Summe zweier Winkel von natürlichen Keilen darstellen. Die Summenformel liefert uns den Ansatz $\frac{rs-1}{r+s} = \frac{3}{2}$ für geeignete positive Zahlen r, s mit $rs > 1$. Wir führen folgendermaßen Äquivalenzumformungen an der Gleichung durch:

$$\frac{rs-1}{r+s} = \frac{3}{2}. \;\Leftrightarrow\; 2rs - 2 = 3r + 3s. \;\Leftrightarrow\; s(2r - 3) = 3r + 2.$$

Das heißt solange wir für r eine positive rationale Zahl mit $2r > 3$ wählen, erhalten wir eine positive rationale Lösung für s mit $rs > 1$, nämlich $s = \frac{3r+2}{2r-3}$. Zum Beispiel liefert $r = 2$ den Wert $s = 8$ bzw. $r = 3$ den Wert $s = \frac{11}{3}$. Beachte, dass $\sphericalangle(\frac{11}{3}, 1) = \sphericalangle(11, 3)$. Diese Lösungen entsprechen den Zerlegungen

$$\begin{aligned}\sphericalangle(3, 2) &= \sphericalangle(2, 1) + \sphericalangle(8, 1),\\ \sphericalangle(3, 2) &= \sphericalangle(3, 1) + \sphericalangle(11, 3).\end{aligned}$$

Wir können analog Zerlegungen des Winkels $\sphericalangle(4, 3)$ finden. In diesem Fall führt uns der Ansatz $\frac{rs-1}{r+s} = \frac{4}{3}$ auf die Gleichung $s = \frac{4r+3}{3r-4}$. Zum Beispiel liefert $r = 2$ den Wert $s = \frac{11}{2}$ bzw. $r = 3$ den Wert $s = 3$. Diese Lösungen entsprechen den Zerlegungen

$$\begin{aligned}\sphericalangle(4, 3) &= \sphericalangle(2, 1) + \sphericalangle(11, 2),\\ \sphericalangle(4, 3) &= \sphericalangle(3, 1) + \sphericalangle(3, 1).\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Summenformel** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Gib einen Beweis für Waldis Summenformel aus Aufgabe 4. Wenn Du möchtest, kannst Du dabei mit Blick auf Skizze 2 folgendermaßen vorgehen:

1. Betrachte die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (r + rs^2, 1 + s^2)$, $C = (rs^2 - s, 1 - rs)$ in einem ebenen Koordinatensystem.
2. Zeige, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig bei C ist und dass der Winkel bei A genau $\sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1)$ beträgt.

3. Bestimme anschließend das Verhältnis der Längen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

Lösung. Wie vorgeschlagen betrachten wir die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (r+rs^2, 1+s^2)$, $C = (rs^2 - s, 1 - rs)$. Sei α bzw. β der spitze Winkel, den die Strecke $[AB]$ bzw. $[AC]$ mit der x-Achse einschließt. Wir sehen, dass α der Winkel eines $(r + rs^2, 1 + s^2)$-Keils ist, siehe die untenstehende Grafik. Wegen $r + rs^2 = r(1 + s^2)$ können wir folgern $\alpha = \sphericalangle(r, 1)$. Außerdem liefert uns die Bedingung $rs > 1$, dass $rs^2 - s = s(rs - 1) > 0$ und $1-rs < 0$, d. h. der Punkt C liegt tatsächlich rechts von der y-Achse und unterhalb der x-Achse. Deshalb ist β der Winkel eines auf dem Kopf stehenden $(rs^2 - s, rs - 1)$-Keils. Wegen $rs^2 - s = s(rs - 1)$ können wir folgern $\beta = \sphericalangle(s, 1)$. Damit haben wir schon mal $\sphericalangle CAB = \alpha + \beta = \sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1)$.

Als nächstes wollen wir beweisen, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig bei C ist und dass die Längen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Verhältnis $(rs - 1)$ zu $(r + s)$ stehen. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier seien zwei davon vorgestellt:

Mit Vektorrechnung. Wir berechnen die beiden Vektoren

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} rs^2 - s \\ 1 - rs \end{pmatrix} = (rs - 1) \cdot \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} r + rs^2 - (rs^2 - s) \\ 1 + s^2 - (1 - rs) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + s \\ s^2 + rs \end{pmatrix} = (r + s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\binom{s}{-1}$ und $\binom{1}{s}$ stehen senkrecht aufeinander, wie man zum Beispiel anhand des Skalarproduktes überprüft: $\binom{s}{-1} \cdot \binom{1}{s} = s \cdot 1 + (-1) \cdot s = s - s = 0$. Insbesondere steht also $\overrightarrow{AC}$ senkrecht auf $\overrightarrow{CB}$, d. h. das Dreieck ΔABC ist rechtwinklig bei C. Außerdem sind die beiden Vektoren $\binom{s}{-1}$ und $\binom{1}{s}$ gleich lang, da sie beide den Betrag $\sqrt{1 + s^2}$ haben. Damit ist sofort klar, dass $\overline{AC}/\overline{BC} = |rs - 1|/|r + s| = (rs - 1)/(r + s)$.

Mit Pythagoras. Wir berechnen einfach die Quadrate der Seiten des Dreiecks ΔABC mithilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\overline{AB}^2 = (r + rs^2)^2 + (1 + s^2)^2 = 1 + r^2 + 2s^2 + 2r^2s^2 + s^4 + r^2s^4,$$
$$\overline{AC}^2 = (rs^2 - s)^2 + (1 - rs)^2 = 1 - 2rs + s^2 + r^2s^2 - 2rs^3 + r^2s^4,$$
$$\overline{BC}^2 = (r + s)^2 + (s^2 + rs)^2 = r^2 + 2rs + s^2 + r^2s^2 + 2rs^3 + s^4.$$

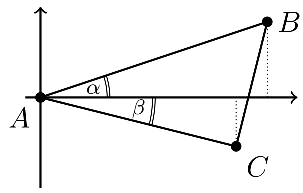
Nun ist leicht zu sehen, dass $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$. Der Satz des Pythagoras ist umkehrbar, deshalb folgt aus dieser Gleichung, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig bei C ist. Wir können die Quadrate der Längen aber auch anders darstellen:

$$\overline{AC}^2 = (rs^2 - s)^2 + (1 - rs)^2 = s^2(rs - 1)^2 + (1 - rs)^2 = (1 + s^2)(rs - 1)^2,$$
$$\overline{BC}^2 = (r + s)^2 + (s^2 + rs)^2 = (r + s)^2 + s^2(s + r)^2 = (1 + s^2)(r + s)^2.$$

Wir folgern daraus $\overline{AC}^2/\overline{BC}^2 = (rs-1)^2/(r+s)^2$ und damit ergibt sich das Verhältnis $\overline{AC}/\overline{BC} = |rs - 1|/|r + s| = (rs - 1)/(r + s)$.

Wir haben also bewiesen, dass das Dreieck ΔABC ähnlich zu einem $(rs-1, r+s)$-Keil ist, wobei der Winkel $\sphericalangle CAB$ dem Keilwinkel entspricht. Abschließend können wir mit den obigen Erkenntnissen die Summenformel zeigen:

$$\sphericalangle(r,1) + \sphericalangle(s,1) = \sphericalangle CAB = \sphericalangle(rs-1, r+s).$$



$\alpha = \sphericalangle(r,1)$, $\beta = \sphericalangle(s,1)$

Aufgabe 6 (Effizientes Werkzeug*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Um nicht unnötigen Ballast mit sich herumschleppen zu müssen, möchte Waldi seine Keilsammlung reduzieren. Die jüngsten Erkenntnisse haben ihn dazu veranlasst, nur noch Keile der Form $(n,1)$ mit positiven natürlichen Zahlen n mit sich zu führen. Auch will er von jedem dieser Keile jeweils nur ein Exemplar einpacken. Bescheinige ihm, dass er damit ebenso gut arbeiten kann wie mit einer Sammlung aller natürlichen Keile.

Genauer: Zeige, dass sich jeder Winkel eines natürlichen Keils als Summe endlich vieler verschiedener Winkel $\sphericalangle(n,1)$ mit positiven natürlichen Zahlen n darstellen lässt! Waldi ist offensichtlich begeistert von dieser Tatsache: „Wie Keil ist das denn bitte?“.

Hinweis. Sei gierig! Nimm von dem Winkel $\sphericalangle(a,b)$ den größtmöglichen Winkel $\sphericalangle(n,1)$ weg und verfahre mit dem Restwinkel ebenso. Zeige mithilfe der Summenformel aus Aufgabe 4, dass Du nach endlich vielen Schritten fertig bist.

Lösung. Wir starten mit einem natürlichen (a,b)-Keil. Wir schildern im Folgenden ein Verfahren, wie wir von $\sphericalangle(a,b)$ den größtmöglichen Winkel $\sphericalangle(n,1)$ abspalten können, wobei n eine positive natürliche Zahl ist.

Es existiert genau eine ganze Zahl b' mit $0 \le b' < b$ so, dass die Zahl $a+b'$ durch b teilbar ist. Der Quotient $(a+b')/b$ ist dann eine positive natürliche Zahl n und es gilt $\frac{a}{b} \le n < \frac{a}{b} + 1$.

Für den Fall dass $b' = 0$, sind wir schon fertig mit unserer Zerlegung, denn dann ist $\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(n,1)$.

Im anderen Fall dass $b' \ne 0$, wollen wir eine positive Zahl r finden mit $nr > 1$ und $\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(n,1) + \sphericalangle(r,1)$. Die Summenformel liefert uns

$$\sphericalangle(n,1) + \sphericalangle(r,1) = \sphericalangle(nr-1, n+r).$$

Die Gleichung, die wir lösen wollen, ist daher äquivalent zu den folgenden:

$$\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(nr-1, n+r). \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{nr-1}{n+r}. \Leftrightarrow an + ar = bnr - b. \Leftrightarrow (bn-a)r = an+b.$$

Wir benutzen jetzt, dass $b' = bn - a$ und $b' \neq 0$. Dies liefert uns die eindeutige Lösung $r = \frac{an+b}{b'}$. Tatsächlich ist wegen $b' < b$ auch $r > 1$ und damit $nr > 1$. Schreiben wir also $a' := an + b$ erhalten wir die Zerlegung

$$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(n, 1) + \sphericalangle(a', b').$$

Wir halten außerdem fest, dass in diesem Fall $\frac{a}{b} < n < \frac{a'}{b'}$, wie man folgendermaßen leicht nachweisen kann unter Beachtung von $0 < b' < b$ und $n = (a + b')/b \geq 1$:

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{a+b'}{b} < \tfrac{an+b}{b'} = \tfrac{a'}{b'}.$$

Nun können wir dieses Verfahren auch auf den Restwinkel $\sphericalangle(a', b')$ anwenden, einen neuen Restwinkel $\sphericalangle(a'', b'')$ erhalten und iterativ so weitermachen. Das Verfahren wird offenbar nach endlich vielen Schritten abbrechen, da die Folge von natürlichen Zahlen $b > b' > b'' > \dots$ strikt abnimmt und somit irgendwann den Wert 0 erreichen muss. Das Resultat ist eine Zerlegung von $\sphericalangle(a, b)$ in endlich viele Winkel der Form $\sphericalangle(n, 1)$ mit positiven natürlichen Zahlen n. Alle vorkommenden Zahlen n müssen dabei verschieden zueinander sein, da die Folge der Zahlen n aufgrund der oben gezeigten Ungleichungen strikt zunimmt.

Weiterführende Literatur

https://de.wikipedia.org/wiki/Arkustangens_und_Arkuskotangens
https://en.wikipedia.org/wiki/Gregory_number
J. H. Conway, R. K. Guy. *The Book of Numbers*, Springer New York, Copernicus, 1996.

Für angehende Holzfäller:

https://www.br.de/mediathek/video/unter-unserem-himmel-dokumentation-brennholz-ein-film-aus-dem-bayerischen-wald-av:5bc482d287dc9a0017b148cc