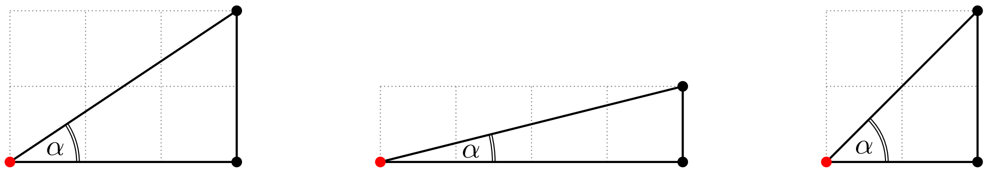
# Keilkalkül

Dieses Mal begleiten wir den professionellen Holzfäller Waldi bei seiner Arbeit. Er hat vom Forstamt den Auftrag erhalten einige Arkusbäume zu fällen, was ein bisschen anders funktioniert als bei gewöhnlichen Bäumen. Zunächst muss er an der Seite, in die der Baum später kippen soll, einen keilförmigen Einschnitt von ca. $45°$ bis $60°$ vornehmen, den sogenannten Fallkerb. So weit, so normal. Jetzt muss auf der gegenüberliegenden Seite ebenfalls ein keilförmiger Einschnitt gemacht werden, dessen Winkel genau auf Größe und Form des Arkusbaumes abgestimmt ist. In diesen Einschnitt führt Waldi nun einen Fällkeil mit exakt passendem Winkel ein. Dann reicht schon ein kleiner Stoß auf den Keil um den Baum gesichert zu Fall zu bringen.

In seinem Werkzeugkasten hat Waldi eine Sammlung verschiedener Keile, damit er für möglichst viele Bäume gewappnet ist. Seine Keile sind alle von folgender Form: Seien $a$, $b$ positive Zahlen. Ein $(a, b)$-Keil ist das rechtwinklige Dreieck, das man erhält, wenn man von einem Ausgangspunkt um $a$ Einheiten nach rechts und anschließend um $b$ Einheiten nach oben geht. Der Winkel $\alpha$ beim Ausgangspunkt des $(a, b)$-Keils wird im Folgenden der Winkel des Keils genannt und mit $\sphericalangle(a, b)$ bezeichnet. Alle Keile in Waldis Inventar erfüllen zusätzlich die Eigenschaft, dass $a$, $b$ natürliche Zahlen sind. Solche $(a, b)$-Keile bezeichnen wir als natürlich. Hier ein paar Beispiele:




$(3, 2)$ $(4, 1)$ $(2, 2)$

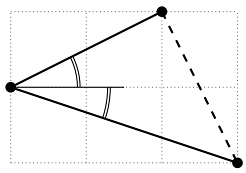
**Aufgabe 1 (Holzfällerbasiswissen* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]).** Seien $a$, $b$, $c$, $d$ positive Zahlen. Zeige die folgenden Eigenschaften von Keilwinkeln:

1. Es gilt $\sphericalangle(1, 1) = 45°$.
2. Es gilt $\sphericalangle(a, b) = 90° - \sphericalangle(b, a)$.
3. Es gilt genau dann $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(c, d)$, wenn $a/b = c/d$.

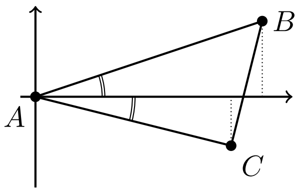
**Aufgabe 2 (Kombinationskeil* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]).** Ein kurzer Blick auf den ersten Arkusbaum und schon ist für Waldi klar, dass hier ein $45°$-Keil gefragt ist. Nach Durchwühlen seiner Kiste muss er jedoch entsetzt feststellen, dass er weder seinen treuen $(1, 1)$-Keil noch sonst irgendeinen $45°$-Keil dabei hat! Nachdenklich starrt Waldi auf den $(2, 1)$-Keil und den $(3, 1)$-Keil in seiner Kiste. „Hmmm, das müsste doch in etwa hinkommen...“, murmelt er vor sich hin und legt den $(2, 1)$-Keil auf den umgedrehten $(3, 1)$-Keil. Er kann sein Glück kaum fassen, als er erkennt, dass sich die beiden Keilwinkel genau zu $45°$ ergänzen! Damit hat er einen geeigneten Ersatz gefunden. Um der Sache auf den Grund zu gehen, kritzelt er untenstehende Skizze 1 in sein Notizheft.

1. Beweise anhand dieser Skizze die Formel $\sphericalangle(1, 1) = \sphericalangle(2, 1) + \sphericalangle(3, 1)$.
2. Zeige anschließend auf ähnliche Weise, dass auch gilt $\sphericalangle(1, 1) = \sphericalangle(3, 2) + \sphericalangle(5, 1)$.

Thema vom 14. Mai 2021. Einsenden der Lösungen bis 2. Juli 2021.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de
Allgemeine Informationen zur Teilnahme: http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel
Allgemeine Hinweise zum Lösen von Aufgaben: http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel



Skizze 1




Skizze 2

**Aufgabe 3** (Keilloses Durcheinander* [4 Punkte]). Beim nächsten Arkusbaum angekommen, stellt unser Holzfäller fest, dass der benötigte Winkel für den Keil genau 30° beträgt. Prompt winkt Waldi ab: „Das geht mit meinen Keilen leider nicht, da muss sich schon einer meiner irrationalen Kollegen drum kümmern!“. Bestätige ihn, indem Du beweist, dass es keinen natürlichen $(a, b)$-Keil gibt mit $\sphericalangle(a, b) = 30°$.

Hinweis. Nimm an es gäbe so einen $(a, b)$-Keil. Welches besondere Dreieck entsteht, wenn Du zwei solcher Keile geeignet aneinanderlegst? Du darfst bis Klasse 8 ohne Beweis verwenden, dass es keine positiven natürlichen Zahlen $a$, $b$ gibt mit $a^2 = 3b^2$. Ab Klasse 9 solltest Du auch das sauber begründen!

**Aufgabe 4** (Verbinden und Zerlegen** [4 Punkte]). Beflügelt von seiner Entdeckung aus Aufgabe 2 untersucht Waldi, wie sich zwei Keilwinkel zu einem neuen Keilwinkel zusammenfügen. Hier ist, was er herausgefunden hat: Seien $r$, $s$ beliebige positive Zahlen mit $rs > 1$. Dann gilt

$$\sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1) = \sphericalangle(rs - 1, r + s).$$

Löse mithilfe dieser Formel folgende Probleme:

1. Zeige, dass die Summe der Winkel von natürlichen $(a, b)$- und $(c, d)$-Keilen mit $ac > bd$ wieder der Winkel eines natürlichen Keils ist!
2. Stelle jeden der beiden Winkel $\sphericalangle(3, 2)$ und $\sphericalangle(4, 3)$ jeweils auf zwei verschiedene Arten als Summe von Winkeln zweier natürlicher Keile dar!

**Aufgabe 5** (Summenformel** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Gib einen Beweis für Waldis Summenformel aus Aufgabe 4. Wenn Du möchtest, kannst Du dabei mit Blick auf Skizze 2 folgendermaßen vorgehen:

1. Betrachte die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (r + rs^2, 1 + s^2)$, $C = (rs^2 - s, 1 - rs)$ in einem ebenen Koordinatensystem.
2. Zeige, dass das Dreieck $\Delta ABC$ rechtwinklig bei $C$ ist und dass der Winkel bei $A$ genau $\sphericalangle(r, 1) + \sphericalangle(s, 1)$ beträgt.
3. Bestimme anschließend das Verhältnis der Längen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

**Aufgabe 6** (Effizientes Werkzeug*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Um nicht unnötigen Ballast mit sich herumschleppen zu müssen, möchte Waldi seine Keilsammlung reduzieren. Die jüngsten Erkenntnisse haben ihn dazu veranlasst, nur noch Keile der Form $(n, 1)$ mit positiven natürlichen Zahlen $n$ mit sich zu führen. Auch will er von jedem dieser Keile jeweils nur ein Exemplar einpacken. Bescheinige ihm, dass er damit ebenso gut arbeiten kann wie mit einer Sammlung aller natürlichen Keile.

Genauer: Zeige, dass sich jeder Winkel eines natürlichen Keils als Summe endlich vieler verschiedener Winkel $\sphericalangle(n, 1)$ mit positiven natürlichen Zahlen $n$ darstellen lässt! Waldi ist offensichtlich begeistert von dieser Tatsache: „Wie Keil ist das denn bitte?“.

Hinweis. Sei gierig! Nimm von dem Winkel $\sphericalangle(a, b)$ den größtmöglichen Winkel $\sphericalangle(n, 1)$ weg und verfahre mit dem Restwinkel ebenso. Zeige mithilfe der Summenformel aus Aufgabe 4, dass Du nach endlich vielen Schritten fertig bist.