Dracostan – Lösungen

Aufgabe 1 (König und Dame* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Als Draco seine Herzensdame Draca kennenlernte, beschloss er, den Stärkenvergleich „$\leq_{KD}$“ einzuführen:

> Für Drachen x und y gilt genau dann $x \leq_{KD} y$, wenn x und y dasselbe Geschlecht (m/w) haben und folgendes erfüllt ist:
>
> – Sind x und y männlich, so gilt genau dann $x \leq_{KD} y$, wenn y Draco ist oder wenn x und y bereits derselbe Drache sind.
>
> – Sind x und y weiblich, so gilt genau dann $x \leq_{KD} y$, wenn y Draca ist oder wenn x und y bereits derselbe Drache sind.

1. Skizziere $\leq_{KD}$ analog zur Skizze von $\leq_K$.
2. Gibt es bei $\leq_{KD}$ einen Stärksten? Einen Unschlagbaren? Begründe Deine Antworten!

Lösung. *Zu 1.* Wir können „ $\leq_{KD}$“ so veranschaulichen:

männlich weiblich

Zu 2. Der Stärkenvergleich „$\leq_{KD}$“ besitzt zwei Unschlagbare, nämlich Draco und Draca (aus demselben Grund wie bei „$\leq_K$“).

Der Stärkenvergleich „$\leq_{KD}$“ besitzt *keinen* Stärksten, denn: Als Stärkste kommen nur Draco und Draca in Frage; da weder Draco $\leq_{KD}$ Draca noch Draca $\leq_{KD}$ Draco gilt, ist weder Draco noch Draca ein Stärkster. Also gibt es keinen Stärksten.

Aufgabe 2 (Schere-Stein-Papier* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Unter Drachenkindern ist der Stärkenvergleich Schere-Stein-Papier beliebt. Ist nach den klassischen Regeln von Schere-Stein-Papier der Stärkenvergleich von Schere, Stein und Papier ein PO-Stärkenvergleich im Sinne des Hohen Drachenrats? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Schere-Stein-Papier ist *kein* PO-Stärkenvergleich, denn ③ ist *nicht* erfüllt: Es gilt (wobei wir den Schere-Stein-Papier-Vergleich mit „$\leq_{SSP}$“ abkürzen)

$$\text{Schere} \leq_{SSP} \text{Stein} \quad \text{und} \quad \text{Stein} \leq_{SSP} \text{Papier};$$

aber es gilt *nicht*, dass Schere $\leq_{SSP}$ Papier.

Aufgabe 3 (Es kann nur einen geben!?* [4 Punkte]). Sei „$\leq$“ ein PO-Stärkenvergleich.

1. Beweise: Sind x und y ein Stärkster, so sind x und y bereits derselbe Drache.
2. Beweise: Ist x ein Stärkster, so ist x auch ein Unschlagbarer.

Thema vom 26. Februar 2021. Einsenden der Lösungen bis 14. Mai 2021.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Hinweis. Es genügt nicht, ein Beispiel anzugeben, in dem dies erfüllt ist. Du musst ein allgemeingültiges logisches Argument mithilfe der Eigenschaften ①, ②, ③ geben!

Lösung. *Zu 1.* Seien x und y Stärkste bezüglich „$\leq$“.

- Da x ein Stärkster ist, gilt $y \leq x$.
- Da y ein Stärkster ist, gilt $x \leq y$.
- Wegen ② folgt somit $x = y$.

Zu 2. Sei x ein Stärkster. Sei y ein Drache mit $x \leq y$. Es ist nun zu zeigen, dass $x = y$ ist. Die Idee ist, nachzuweisen, dass mit x auch y ein Stärkster ist:

- Sei z ein Drache.
- Da x ein Stärkster ist, gilt $z \leq x$.
- Nach Voraussetzung ist $x \leq y$.
- Wegen $z \leq x$ und $x \leq y$ folgt mit ③, dass $z \leq y$.
- Also ist y ein Stärkster.

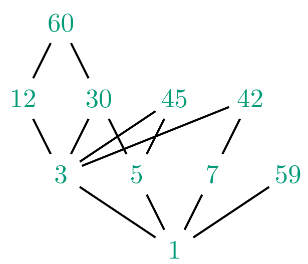
Mit dem ersten Aufgabenteil erhalten wir somit $x = y$. ◫

◫ **Aufgabe 4** (geteilte Seriennummern** [4 Punkte]). Aus Langeweile überlegt sich einer der Schreibtischdrachen den folgenden Stärkenvergleich „$\leq_T$“ (unter der Annahme, dass alle Seriennummern positive natürliche Zahlen sind):

> Für Drachen x und y gilt genau dann $x \leq_T y$, wenn die Seriennummer $S(x)$ von x ein Teiler von $S(y)$ ist.

1. Skizziere $\leq_T$ für die Seriennummern 1, 3, 5, 7, 12, 30, 42, 45, 59, 60.
2. Beweise, dass $\leq_T$ ein PO-Stärkenvergleich ist.

Lösung. *Zu 1.* Wir können „$\leq_T$“ so illustrieren, wobei wir für die Beziehungen, die sich aus ③ ergeben, der Übersichtlichkeit halber keine zusätzlichen Linien einzeichnen:



Zu 2. Wir weisen die drei Eigenschaften nach:

① Sei x eine positive natürliche Zahl. Wegen $x \cdot 1 = x$ ist x ein Teiler von x. Also gilt $x \leq_T x$.

② Seien x und y positive natürliche Zahlen mit $x \leq_T y$ und $y \leq_T x$. Wir zeigen, dass $x = y$ ist:

- Wegen $x \leq_T y$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $x \cdot n = y$.
- Wegen $y \leq_T x$ gibt es eine natürliche Zahl m mit $y \cdot m = x$.
- Mit den vorigen beiden Schritten folgt
$$x \cdot n \cdot m = y \cdot m = x.$$
- Da x positiv ist, ist $x \neq 0$, und damit folgt
$$n \cdot m = 1.$$
- Da n und m natürliche Zahlen sind, erhalten wir daraus $n = 1$ und $m = 1$.
- Einsetzen in die ursprünglichen Gleichungen liefert somit
$$x = x \cdot 1 = x \cdot n = y.$$

Also ist $x = y$.

③ Seien x, y, z positive natürliche Zahlen mit $x \leq_T y$ und $y \leq_T z$. Wir zeigen, dass dann auch $x \leq_T z$ gilt:

- Wegen $x \leq_T y$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $x \cdot n = y$.
- Wegen $y \leq_T z$ gibt es eine natürliche Zahl m mit $y \cdot m = z$.
- Wenn wir diese beiden Gleichungen kombinieren, erhalten wir
$$x \cdot n \cdot m = y \cdot m = z.$$

Also ist x ein Teiler von z bzw. $x \leq_T z$.

Aufgabe 5 (Oberst (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]).** Sei „$\leq$“ ein PO-Stärkenvergleich und sei M eine Menge von Drachen. Ein Oberst von M ist ein Drache x (nicht unbedingt aus M) mit der Eigenschaft: Für alle Drachen y aus M gilt $y \leq x$.

1. Zeige: Ist x ein Oberst von M und ist $x \leq y$, so ist auch y ein Oberst von M.
2. Es gibt nun unendlich viele Drachen in Dracostan und als Seriennummern sind alle natürlichen Zahlen in Gebrauch. Zeige: Zu jeder endlichen Menge von Drachen gibt es einen Oberst bezüglich „$\leq_T$“ (Aufgabe 4).

Lösung. *Zu 1.* Sei x ein Oberst von M und sei $x \leq y$. Wir zeigen, dass dann auch y ein Oberst von M ist:

- Sei $z \in M$. Es ist zu zeigen, dass $z \leq y$ gilt.
- Da x ein Oberst von M ist, gilt $z \leq x$.
- Wegen $z \leq x$ und $x \leq y$ folgt aus ③, dass $z \leq y$.

Also ist y ein Oberst von M.

Zu 2. Sei M eine endliche Menge von Drachen. Ist M die leere Menge, so ist 1 ein Oberst von M.

Sei M daher nun nicht-leer und sei x das Produkt über alle Elemente von M (dies ist möglich, da M nur endlich viele Elemente enthält). Dann ist x ein Oberst von M, denn:

- Sei $y \in M$. Es ist zu zeigen, dass $y \leq_T x$ gilt.
- Da x das Produkt über alle Elemente von M ist, ist y ein Teiler von x.
- Somit ist $y \leq_T x$.

Also ist x ein Oberst von M.

Aufgabe 6 (rationale Seriennummern*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). In Dracostan gibt es nun noch mehr Drachen: Es gibt unendlich viele Drachen und als Seriennummern sind nun alle rationalen Zahlen in Gebrauch; es wird „$\leq_S$" wie im dritten Beispiel verwendet. Zeige: Es gibt eine Menge M von Drachen mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Die Menge M besitzt einen Oberst (Aufgabe 5).
- Zu jedem Oberst x von M existiert ein Oberst x' von M mit $x' \leq_S x$ und $x \neq x'$.

Lösung. Wir betrachten die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

aller rationalen Zahlen, die (aufgefasst als reelle Zahlen) echt kleiner als $\sqrt{2}$ sind.

Diese Menge M besitzt einen Oberst bezüglich „$\leq_S$", denn: Zum Beispiel ist 2 ein Oberst von M, da jedes Element x von M kleiner als $\sqrt{2}$, und damit erst recht kleiner als 2, ist.

Sei x ein Oberst von M. Dann gibt es einen Oberst x' von M mit $x' \leq_S x$ und $x \neq x'$, denn: Für den Beweis verwenden wir das *archimedische Prinzip*:

(A) Sind y, y' reelle Zahlen mit $y < y'$, so gibt es eine *rationale* Zahl z, die gleichzeitig $y < z$ und $z < y'$ erfüllt.

Wir zeigen nun, dass x die behauptete Eigenschaft hat:

- Es gilt $\sqrt{2} < x$, denn: Da $\sqrt{2}$ *nicht* rational ist, ist $x \neq \sqrt{2}$.

  Angenommen, es wäre $x < \sqrt{2}$. Nach (A) gäbe es dann ein rationale Zahl z mit $x < z$ und $z < \sqrt{2}$. Insbesondere wäre $z \not\leq_S x$ und $z \in M$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass x ein Oberst von M ist. Daher ist x *nicht* kleiner als $\sqrt{2}$.

  Also bleibt nur die Möglichkeit, dass $\sqrt{2} < x$ ist.
- Nach (A) gibt es eine rationale Zahl x' mit $\sqrt{2} < x'$ und $x' < x$.
- Wegen $\sqrt{2} < x'$ sieht man wie in der ersten Teilaufgabe, dass x' ein Oberst von M ist.
- Wegen $x' < x$ ist $x' \neq x$ und $x' \leq_S x$.

Da die Zahl $\sqrt{2}$ *nicht* rational ist, ist $x \neq \sqrt{2}$.

Partielle Ordnungen

Perfekt offizielle Stärkenvergleiche sind außerhalb von Dracostan als *partielle Ordnungen* bekannt; die Begriffe übersetzen sich wie folgt:

PO-Stärkenvergleich	partielle Ordnung
Stärkster	größtes Element
Unschlagbarer	maximales Element
Oberst	obere Schranke

Weiterführende Literatur

U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985.
A. Steger. *Diskrete Strukturen I: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra*, Springer, 2007.