Rentierparadoxon - Lösungen

Aufgabe 1 (Der Satz von Bayes* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Seien A und B Ereignisse mit $P(B) > 0$. Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist, ist definiert als $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Zeige, dass der Satz von Bayes, also $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ gilt.

Lösung. Der Beweis gelingt durch zweifaches Anwenden der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und geschickte Erweiterung des Bruches wie folgt: Es gilt

$$P(A|B) \overset{\text{Definition}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \cdot P(A)}{P(B)} \overset{\text{Definition}}{=} \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Aufgabe 2 (Geschenkeauswahl* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Trixi ist nun auf einer Weihnachtsfeier zu Besuch, und hat drei von außen gleich aussehende Geschenkboxen dabei. In einer Box ist ein Fußball, und in den anderen beiden sind Süßigkeiten. Ein Kind, Theo, darf eine Schachtel wählen, diese bleibt vorerst verschlossen. Trixi öffnet eine der beiden anderen Schachteln, nach folgendem Kriterium: Befindet sich der Fußball in der von Theo gewählten Schachtel, zeigt Trixi zufällig den Inhalt einer der beiden anderen Schachteln. Befindet sich der Fußball nicht in der von Theo gewählten Schachtel, so zeigt Trixi den Inhalt derjenigen anderen Schachtel, wo auch nur Süßigkeiten drin sind. Trixi fragt nun noch einmal nach, ob Theo seine Wahl überdenken möchte, und lieber die andere ungeöffnete Schachtel als Geschenk haben möchte.

Theo möchte lieber einen Fußball haben als Süßigkeiten. Sollte Theo das Angebot annehmen und seine Wahl ändern? Begründe deine Antwort.

Lösung. Theo sollte das Angebot annehmen und seine Wahl ändern, was wie folgt einzusehen ist: Bezeichne die drei Geschenkboxen als Geschenkbox-1, Geschenkbox-2 und Geschenkbox-3, und definiere folgende Ereignisse:

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ bezeichne T_i das Ereignis „Trixi hat Geschenkbox-i geöffnet", und es bezeichne F_i das Ereignis „Der Fußball ist in Geschenkbox-i". Dann sind in der Aufgabenstellung folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(F_1) = P(F_2) = P(F_3) = \frac{1}{3} \tag{1}$$

Im Fall, dass Theo seine Wahl nicht ändert, beträgt die Chance auf den Fußball also $\frac{1}{3}$.

Da die Nummerierung der Geschenkboxen keine Rolle spielt, können wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass Theo die Geschenkbox-1 gewählt hat. Dann erhalten wir aus der Aufgabenstellung folgende weitere Wahrscheinlichkeitswerte:

$$P(T_3|F_1) = \frac{1}{2},\ P(T_3|F_2) = 1,\ P(T_3|F_3) = 0. \tag{2}$$

Thema vom 06. Dezember 2019. Einsenden der Lösungen bis 02. Februar 2020.

Aus Symmetriegründen und da die Nummerierung der Geschenkboxen keine Rolle spielt, können wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass Trixi die Geschenkbox-3 geöffnet hat. Nehmen wir nun an, dass Theo seine Wahl ändert, also dass er die andere verschlossene Box, das heißt Geschenkbox-2 anstelle der zuerst gewählten Geschenkbox-1 aussucht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Theo dann die Schachtel mit dem Fußball gewählt hat, entspricht gerade $P(F_2|T_3)$, was sich mit Hilfe des Satzes von Bayes wie folgt berechnen lässt:

$$P(F_2|T_3) = \frac{P(T_3|F_2) \cdot P(F_2)}{P(T_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{P(T_3)} = \frac{\frac{1}{3}}{P(T_3)}. \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung genau eines der Ereignisse F_1, F_2 und F_3 eintritt, gilt

$$P(T_3) = P(F_1 \cap T_3) + P(F_2 \cap T_3) + P(F_3 \cap T_3),$$

und zusammen mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} P(T_3) &= P(F_1 \cap T_3) + P(F_2 \cap T_3) + P(F_3 \cap T_3) \\ &= P(T_3|F_1) \cdot P(F_1) + P(T_3|F_2) \cdot P(F_2) + P(T_3|F_3) \cdot P(F_3) \\ &\overset{(1),(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Es folgt

$$P(F_2|T_3) \overset{(3)}{=} \frac{\frac{1}{3}}{P(T_3)} \overset{(4)}{=} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Wenn Theo seine Wahl ändert, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Fußball bekommt also von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$, das heißt sie verdoppelt sich.

Aufgabe 3 (Irrelevante Bedingungen?** [4 Punkte]). Rudolphs beste Freunde sind zwei Eichhörnchen.

1. Trixi weiß, dass mindestens eines dieser beiden Eichhörnchen weiblich ist. Unter der Annahme, dass das Verhältnis von weiblichen zu männlichen Eichhörnchen 50 : 50 ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Eichhörnchen weiblich sind?

2. Trixis Freund Gilfi dagegen weiß, dass mindestens eines der beiden Eichhörnchen ein weibliches Eichhörnchen ist, welches an einem Sonntag geboren wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Rudolphs beiden besten Freunde weibliche Eichhörnchen sind?

Lösung. Zu 1. Bezeichne Rudolphs beste Freunde mit Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2. Dann können nach Voraussetzung – da wir wissen, dass eines der Eichhörnchen weiblich ist – folgende Ergebnisse eintreten:

WW : „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich “,

WM : „Eichhörnchen-1 ist weiblich und Eichhörnchen-2 ist männlich “,

MW : „Eichhörnchen-1 ist männlich und Eichhörnchen-2 ist weiblich “.

Da das Verhältnis von weiblichen zu männlichen Eichhörnchen nach Aufgabenstellung 50 : 50 ist, sind diese drei Ergebnisse alle gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit, dass Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 weiblich sind, ist somit – wie man durch einfaches Abzählen sieht – gegeben durch

$$P(WW) = \frac{1}{3}.$$

Zu 2. Hier haben wir im Vergleich zu 1. einen veränderten Ergebnisraum. Da wiederum das Verhältnis von weiblichen zu männlichen Eichhörnchen nach Aufgabenstellung 50 : 50 ist, und da auch jeder Wochentag als Geburtstag gleich wahrscheinlich ist, enthält der Ergebnisraum nun folgende mögliche 27 Ergebnisse, welche mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten:

$WW - SoSo$: „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich und wurden an einem Sonntag geboren “,

$WW - SoMo$: „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Sonntag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Montag “,

$\vdots$

$WW - SoSa$: „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Sonntag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Samstag “,

$WM - SoSo$: „Eichhörnchen-1 ist weiblich, Eichhörnchen-2 ist männlich und Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 wurden an einem Sonntag geboren “,

$\vdots$

$WM - SoSa$: „Eichhörnchen-1 ist weiblich, Eichhörnchen-2 ist männlich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Sonntag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Samstag “,

$MW - SoSo$: „Eichhörnchen-1 ist männlich, Eichhörnchen-2 ist weiblich und Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 wurden an einem Sonntag geboren “,

$\vdots$

$MW - SaSo$: „Eichhörnchen-1 ist männlich, Eichhörnchen-2 ist weiblich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Samstag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Sonntag “,

$WW - MoSo$: „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Montag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Sonntag “,

$\vdots$

$WW - SaSo$: „Eichhörnchen-1 und Eichhörnchen-2 sind weiblich und Eichhörnchen-1 wurde an einem Samstag geboren, Eichhörnchen-2 an einem Sonntag “.

Wir beachten hierbei, dass dies die 27 möglichen Ergebnisse sind, da nach Aufgabenstellung mindestens eines der beiden Eichhörnchen ein weibliches Eichhörnchen ist, welches an einem Sonntag geboren wurde. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Eichhörnchen weiblich sind, beträgt also (wie man durch Abzählen sieht)

$$P(\{WW - SoSo, \ldots, WW - SoSa, WW - MoSo, \ldots, WW - SaSo\}) = \frac{13}{27}.$$

Aufgabe 4 (noch mehr bedingte Wahrscheinlichkeiten** [4 Punkte]). Trixi bekommt den Auftrag, für eine Feier, an der alle Wichtel teilnehmen, Kinderpunsch und Tee zu besorgen. Er weiß, dass 30% der Wichtel dieses Jahr neu dabei sind. Von diesen bevorzugen 50% Kinderpunsch, und von den übrigen Wichteln bevorzugen 80% Kinderpunsch.

1. Stelle den Sachverhalt durch eine Vierfeldertafel und ein Baumdiagramm dar.

2. Wie viel Prozent der Wichtel, von denen man weiß, dass sie Kinderpunsch bevorzugen, sind dieses Jahr nicht erst neu dabei?

3. Wie viel Prozent der Wichtel, die dieses Jahr nicht das erste Mal dabei sind, bevorzugen Tee?

Lösung. Bezeichne N das Ereignis „Wichtel ist dieses Jahr neu dabei“und es bezeichne K das Ereignis „Wichtel bevorzugt Kinderpunsch“.

Zu 1. Die zur Aufgabenstellung zugehörige Vierfeldertafel ist wie folgt definiert:

	N	$\bar{N}$	
K	$P(K \cap N)$	$P(K \cap \bar{N})$	$P(K)$
$\bar{K}$	$P(\bar{K} \cap N)$	$P(\bar{K} \cap \bar{N})$	$P(\bar{K})$
	$P(N)$	$P(\bar{N})$	100%

Nach Aufgabenstellung gilt

$P(K|N) = 50\%, P(K|\bar{N}) = 80\%$ und $P(N) = 30\%$ und somit auch $P(\bar{N}) = 100\% - 30\% = 70\%$.

Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(K|N) = \frac{P(K \cap N)}{P(N)} \text{ und } P(K|\bar{N}) = \frac{P(K \cap \bar{N})}{P(\bar{N})}$$

und zusammen mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten von oben folgt

$$P(K \cap N) = P(K|N) \cdot P(N) = 50\% \cdot 30\% = 15\% \text{ und}$$
$$P(K \cap \bar{N}) = P(K|\bar{N}) \cdot P(\bar{N}) = 80\% \cdot 70\% = 56\%.$$

Es folgt

$$P(\bar{K} \cap N) = P(N) - P(K \cap N) = 30\% - 15\% = 15\% \text{ und}$$
$$P(\bar{K} \cap \bar{N}) = P(\bar{N}) - P(K \cap \bar{N}) = 70\% - 56\% = 14\%.$$

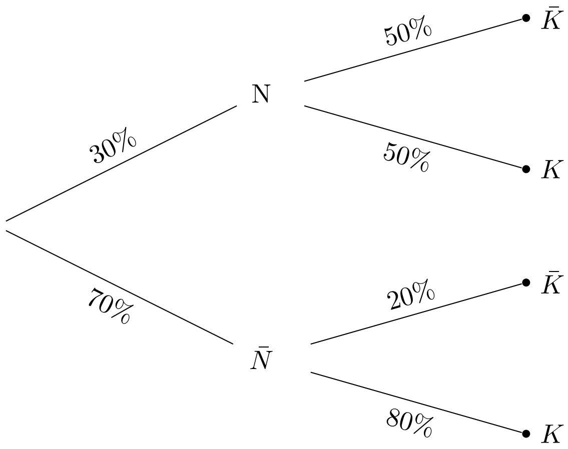
Wir erhalten daraus nun noch die fehlenden Wahrscheinlichkeiten

$$P(K) = P(K \cap N) + P(K \cap \bar{N}) = 15\% + 56\% = 71\% \text{ und}$$
$$P(\bar{K}) = 100\% - P(K) = 29\%.$$

Es ergibt sich also folgende Vierfeldertafel:

	N	$\bar{N}$	
K	15%	56%	71%
$\bar{K}$	15%	14%	29%
	30%	70%	100%

Als Baumdiagramm erhalten wir direkt aus der Aufgabenstellung das Folgende:



Zu 2. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{N}|K)$. Es gilt nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit zusammen mit den in 1. berechneten Wahrscheinlichkeiten, dass

$$P(\bar{N}|K) = \frac{P(\bar{N} \cap K)}{P(K)} = \frac{56\%}{71\%} = \frac{56}{71} \approx 79\%.$$

Zu 3. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{K}|\bar{N})$. Es gilt nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit zusammen mit den in 1. berechneten Wahrscheinlichkeiten, dass

$$P(\bar{K}|\bar{N}) = \frac{P(\bar{K} \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{14\%}{70\%} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

Aufgabe 5 (Strategiespiel der Wichtel** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Da es gut wäre, wenn nicht alle Wichtel mit auf Geschenketour gehen, hat sich der Weihnachtsmann ein Spiel ausgedacht: Alle 3000 Wichtel stellen sich hintereinander auf, und jeder bekommt eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 auf den Rücken geklebt. Jeder Wichtel kann genau die Zahlen aller seiner Vordermänner sehen. Nun sagt – von hinten nach vorne – jeder Wichtel eine Zahl. Ist diese Zahl die Zahl, die er auf seinem Rücken hat, darf er mitkommen. Vor Beginn des Spiels dürfen die Wichtel sich beratschlagen, wie sie am besten vorgehen sollen. Beispielsweise könnte jeder zweite die Zahl seines Vordermannes vorlesen, dann könnte dieser die Zahl einfach wiederholen, und dürfte mitkommen. Damit dürften dann sicher 1500 Wichtel mitkommen.

Finde einen optimalen Algorithmus für die Wichtel. Wie viele Wichtel dürfen damit sicher mitkommen?

Lösung. Es gibt einen Algorithmus, sodass höchstens ein Wichtel nicht mit auf Geschenketour gehen darf, also sodass sicher 2999 Wichtel mitdürfen. Dieser lässt sich wie folgt beschreiben:

Bezeichne die 3000 Wichtel von hinten nach vorne mit Wichtel-1, …, Wichtel-3000. Bezeichne mit $n_1, \ldots, n_{3000}$ die zugehörigen Ziffern auf den Rücken der Wichtel, also Wichtel-1 trägt die Ziffer n_1 auf dem Rücken und für $i \in \{1, \ldots, 3000\}$ sei n_i die Ziffer auf dem Rücken von Wichtel-i. Der hinterste Wichtel, also Wichtel-1, beginnt nun wie folgt:

Er addiert alle Ziffern der vor ihm stehenden Wichtel, das heißt er berechnet die Summe

$$n_2 + n_3 + \ldots + n_{3000} = \sum_{i=2}^{3000} n_i,$$

und spricht das Ergebnis dieser Summenberechnung dann laut aus. Diese Zahl bezeichnen wir mit Z_1.

Als Nächstes ist Wichtel-2 an der Reihe, eine Zahl zu sagen. Dieser Wichtel berechnet nun die Differenz

$$Z_1 - (n_3 + n_4 + \ldots + n_{3000}) = Z_1 - \sum_{i=3}^{3000} n_i,$$

welche wir mit Z_2 bezeichnen, und Wichtel-2 spricht diese Zahl laut aus. Sie entspricht offenbar der Ziffer auf seinem Rücken, denn

$$Z_2 = Z_1 - \sum_{i=3}^{3000} n_i = \sum_{i=2}^{3000} n_i - \sum_{i=3}^{3000} n_i = n_2.$$

Analog gehen nun auch alle anderen Wichtel, also Wichtel-3 bis Wichtel-3000 vor. So finden Wichtel-2 bis Wichtel-3000 die Ziffer auf ihrem Rücken heraus, und lediglich bei Wichtel-1 ist unklar, ob die von ihm ausgesprochene Ziffer der Ziffer auf seinem Rücken entspricht.

Einen Algorithmus, mit dem sicher alle 3000 Wichtel mit auf Geschenketour gehen dürfen, gibt es nicht, da niemand die Ziffer auf dem Rücken von Wichtel-1 sehen kann, und dieser seine Zahl also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10}$ richtig erraten kann. Es folgt also, dass der oben beschriebene Algorithmus ein optimaler Algorithmus für die Wichtel ist.

Hinweis. Bei dem oben beschriebenen Algorithmus kann der Fall auftreten, dass der hinterste Wichtel – also Wichtel-1 – eine Zahl nennt, welche größer als 9 ist, welche also sicher nicht der Zahl auf seinem Rücken entspricht. Um diesen Fall auszuschließen, kann man im oben beschriebenen Algorithmus jeweils stets „modulo 10 “rechnen, was im Allgemeinen einen optimaleren Algorithmus liefert.

Aufgabe 6 (Geschenkestrategie*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Sei G eine natürliche Zahl, und wir betrachten G Geschenke. In $F, F < G$ Geschenken befinden sich Fußbälle, und in $S, S < G$ Geschenken befinden sich Süßigkeiten. Ein Kind darf nun wieder auf eines der Geschenke zeigen, und Trixi öffnet zufällig $s, s < S$ Geschenke mit Süßigkeiten, und $f, f < F$ Geschenke mit Fußbällen, wobei er nicht das gewählte Geschenk öffnet, und die Wahl der Geschenke, die Trixi öffnet, unabhängig von der Geschenkewahl des Kindes ist. Das Kind hat nun die Möglichkeit, die Wahl des Geschenkes noch einmal auf ein anderes ungeöffnetes Geschenk zu ändern.

In welchen Fällen sollte die Wahl geändert werden (in Abhängigkeit von s, S, f und F), wenn das Kind lieber einen Fußball haben möchte? Begründe deine Antwort.

Lösung. Zunächst beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kind einen Fußball bekommt, wenn es seine Wahl nicht ändert

$$\frac{F}{G} = \frac{F}{F+S}.$$

Die Chance auf einen Fußball ist also durch das Verhältnis der Anzahl F von Schachteln mit Fußbällen zur Anzahl S von Schachteln mit Süßigkeiten bestimmt. Betrachte nun drei verschiedene Fälle:

- Gilt
$$\frac{f}{s} = \frac{F}{S},$$
so entspricht das Verhältnis von Schachteln mit Fußbällen zu Schachteln mit Süßigkeiten unter den noch verschlossenen Schachteln gerade dem Verhältnis dieser Arten von Schachteln zu Beginn, also vor der Wahl einer Geschenkbox. Es folgt, dass das Wechseln der Geschenkeauswahl keine Auswirkung auf die Chance auf einen Fußball hat.

- Gilt andererseits
$$\frac{f}{s} < \frac{F}{S},$$
so wurde ein verhältnismäßig größerer Anteil an Geschenken mit Süßigkeiten als mit Fußbällen geöffnet. Das heißt, dass sich das Verhältnis von Geschenken mit Fußbällen zu Geschenken mit Süßigkeiten unter den ungeöffneten Geschenken im Vergleich zum Beginn verbessert hat. In diesem Fall sollte das Kind also seine Wahl ändern, um seine Chancen auf einen Fußball zu erhöhen.

- Betrachte nun noch den Fall, dass
$$\frac{f}{s} > \frac{F}{S}$$
gilt. Dies bedeutet gerade, dass sich das Verhältnis von Geschenken mit Fußbällen zu Geschenken mit Süßigkeiten unter den ungeöffneten Geschenken im Vergleich zum Beginn verschlechtert hat. Das Kind sollte seine Wahl also nicht ändern, da sich im Fall der Änderung seiner Wahl die Chance auf einen Fußball verringern würde. ◻