Schwebefanten – Lösungen

Aufgabe 1 (Simpsons Paradoxon und Brüche* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]).
Seien a, b, x, y, a', b', x', y' positive Zahlen. Zeige:

$$\text{Aus}\quad \frac{a}{x} \geq \frac{a'}{x'} \quad\text{und}\quad \frac{b}{y} \geq \frac{b'}{y'} \quad\text{folgt im allgemeinen nicht auch}\quad \frac{a+b}{x+y} \geq \frac{a'+b'}{x'+y'}.$$

Hinweis. Es genügt, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben. Die Studien von Levitathan und Wolkenschlösschen liefern ein solches Beispiel!

Lösung. Wir verwenden die Zahlen aus den Studien von Levitathan und Wolkenschlösschen. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} a &:= 21 \\ x &:= 21 + 2 = 23 \\ a' &:= 72 \\ x' &:= 72 + 18 = 90 \\ b &:= 52 \\ y &:= 52 + 32 = 84 \\ b' &:= 11 \\ y' &:= 11 + 13 = 24. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{a}{x} = \frac{21}{23} \geq \frac{72}{90} = \frac{a'}{x'} \quad\text{und}\quad \frac{b}{y} = \frac{52}{84} \geq \frac{11}{24} = \frac{b'}{y'},$$

aber

$$\frac{a+b}{x+y} = \frac{73}{107} < \frac{83}{114} = \frac{a'+b'}{x'+y'}.$$

Aufgabe 2 (Vermeidung von Simpsons Paradoxon* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]).

1. Seien a, b, a', b', x, y positive Zahlen. Zeige:
$$\text{Aus}\quad \frac{a}{x} \geq \frac{a'}{x} \quad\text{und}\quad \frac{b}{y} \geq \frac{b'}{y} \quad\text{folgt}\quad \frac{a+b}{x+y} \geq \frac{a'+b'}{x+y}.$$
2. Wie kann dies zur Vermeidung von Simpsons Paradoxon eingesetzt werden?

Lösung. *Zu 1.* Es gelte $a/x \geq a'/x$ und $b/y \geq b'/y$. Da x und y positiv sind, folgt daraus bereits, dass $a \geq a'$ und $b \geq b'$ ist. Also ist $a + b \geq a' + b'$, und damit (da mit x und y auch $x + y$ positiv ist)

$$\frac{a+b}{x+y} \geq \frac{a'+b'}{x+y}.$$

Zu 2. Wählt man die Gruppen, auf denen die verschiedenen Methoden getestet werden, gleich groß, so kann Simpsons Paradoxon nach dem ersten Teil nicht auftreten.

[Im Schwebefantenbeispiel hätte man also die Methode S und die Methode G auf der gleichen Anzahl an jungen Elefanten testen sollen (und ebenso auch für die alten Elefanten).]

Aufgabe 3 (einfache Verhältnisse?* [4 Punkte]). Seien a, x, a', x' postive Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr? Begründe Deine Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Ist $\frac{a}{x} \geq 1$ und $\frac{a'}{x'} \geq 1$, so gilt auch $\frac{a+a'}{x+x'} \geq 1$.
2. Ist $\frac{a}{x} \geq 1$ und $\frac{a'}{x'} \leq 1$, so gilt $\frac{a+a'}{x+x'} = 1$.

Lösung. *Zu 1.* Diese Aussage ist wahr, denn: Es gelte $a/x \geq 1$ und $a'/x' \geq 1$. Da x und x' positiv sind, folgt $a \geq x$ und $a' \geq x'$, und damit $a + a' \geq x + x'$. Da mit x und x' auch $x + x'$ positiv ist, erhalten wir daraus

$$\frac{a+a'}{x+x'} \geq 1.$$

Zu 2. Diese Aussage ist im allgemeinen *nicht* wahr, denn: Es genügt ein Gegenbeispiel anzugeben. Ein solches ist

$$\begin{aligned} a &:= 2 \\ x &:= 1 \\ a' &:= 1 \\ x' &:= 1, \end{aligned}$$

denn: Es gilt

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{1} \geq 1 \quad \text{und} \quad \frac{a'}{x'} = \frac{1}{1} \leq 1,$$

aber

$$\frac{a+a'}{x+x'} = \frac{3}{2} \neq 1.$$

Aufgabe 4 (Steuersenkung?* [4 Punkte]). Auf dem Planeten Obolus möchte der Finanzminister Max Tax die neuen Steuersätze für 2020 so festlegen, dass im Vergleich zum Jahr 2019 in jeder Einkommensgruppe der Steuersatz sinkt und die Gesamtsteuereinnahmen trotzdem steigen. Wie kann er das erreichen? Begründe Deine Antwort!

Einkommen	Steuerzahler in 2019	alter Steuersatz	Steuerzahler in 2020	neuer Steuersatz
5000	5000	5%	3000	?
10000	10000	10%	11500	?
100000	1000	20%	1500	?

Lösung. Der Finanzminister könnte zum Beispiel die folgenden Steuersätze festsetzen:

Einkommen	neuer Steuersatz
5000	4%
10000	9%
100000	19%

In jeder Einkommensgruppe ist der neue Steuersatz somit geringer. Wir bestimmen nun noch die Gesamtsteuereinnahmen:

- im Jahr 2019 erhalten wir
$$5000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 5000 + 10000 \cdot \frac{10}{100} \cdot 10000 + 1000 \cdot \frac{20}{100} \cdot 100000 = 31250000$$
- im Jahr 2020 erhalten wir
$$3000 \cdot \frac{4}{100} \cdot 5000 + 11500 \cdot \frac{9}{100} \cdot 10000 + 1500 \cdot \frac{19}{100} \cdot 100000 = 39450000$$

Also sind die Gesamtsteuereinahmen im Jahr 2020 höher als im Jahr 2019.

Aufgabe 5 (kleines Simpson-Paradoxon?** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Gibt es $a, x, a', x', b, y, b', y' \in \{1, 2\}$ mit $a \leq x$, $a' \leq x'$, $b \leq y$, $b' \leq y'$ und

$$\frac{a}{x} \geq \frac{a'}{x'} \quad \text{und} \quad \frac{b}{y} \geq \frac{b'}{y'} \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{x+y} < \frac{a'+b'}{x'+y'} \quad ?$$

Begründe Deine Antwort!

Hinweis. Die vorigen Aufgaben können helfen, den Suchraum deutlich einzugrenzen. Falls Du ein Computerprogramm verwendest, solltest Du auch den Quellcode einreichen und erklären, was das Programm macht.

Lösung. Wir betrachten

$$\begin{aligned} a &:= 1, \quad x := 2, \quad a' := 1, \quad x' := 2 \\ b &:= 1, \quad y := 1, \quad b' := 2, \quad y' := 2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{2} = \frac{a'}{x'} \quad \text{und} \quad \frac{b}{y} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{2}{2} = \frac{b'}{y'}$$

und

$$\frac{a+b}{x+y} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4} = \frac{a'+b'}{2+2}.$$

Wie kann man ein solches Beispiel finden? Aufgabe 2 zeigt uns, dass wir kein solches Beispiel finden können, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gleichzeitig erfüllt ist. Außerdem gilt unter den gegebenen Voraussetzungen: Ist $a = 1$ und $x = 2$, so folgt bereits $a' = 1$ und $x' = 2$. Auf diese Weise bleiben nur noch wenige Fälle zu betrachten.

Aufgabe 6 (noch mehr Ungleichungen*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Seien $x, y, z \geq 0$.

1. Zeige: Ist $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$, so folgt
$$\frac{x}{1+y\cdot z}+\frac{y}{1+x\cdot z}+\frac{z}{1+x\cdot y}\leq 2.$$
2. Gilt dies auch ohne die Einschränkung, dass $x \leq 1$ ist? Begründe Deine Antwort!

Lösung. *Zu 1.* Da der Ausdruck
$$\frac{x}{1+y\cdot z}+\frac{y}{1+x\cdot z}+\frac{z}{1+x\cdot y}$$
in x, y, z symmetrisch ist, können wir $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ annehmen. Daher ist
$$\begin{aligned}\frac{x}{1+y\cdot z}+\frac{y}{1+x\cdot z}+\frac{z}{1+x\cdot y} &\leq \frac{x}{1+x\cdot y}+\frac{y}{1+x\cdot y}+\frac{z}{1+x\cdot y}\\ &= \frac{x+y+z}{1+x\cdot y}.\end{aligned}$$

Wegen $x, y, z \leq 1$ ist
$$\begin{aligned}x+y+z &= -(1-x)\cdot(1-y)+1+x\cdot y+z\\ &\leq 0+1+x\cdot y+z\\ &\leq 1+x\cdot y+1\\ &\leq 2\cdot(1+x\cdot y).\end{aligned}$$
Zusammen mit der obigen Abschätzung erhalten wir daher
$$\frac{x}{1+y\cdot z}+\frac{y}{1+x\cdot z}+\frac{z}{1+x\cdot y}\leq \frac{x+y+z}{1+x\cdot y}\leq \frac{2\cdot(1+x\cdot y)}{1+x\cdot y}=2.$$

Zu 2. Nein, ist $x > 1$, so gilt die Ungleichung im allgemeinen nicht, denn: Es genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Wir wählen dazu
$$x := 100, \quad y := 1, \quad z := 1.$$
Dann sind $y \leq 1$ und $z \leq 1$, aber es gilt
$$\frac{x}{1+y\cdot z}+\frac{y}{1+x\cdot z}+\frac{z}{1+x\cdot y}\geq \frac{x}{1+y\cdot z}=\frac{100}{2}>2.$$

Weiterführende Literatur

Vorsicht Statistik!, Spektrum der Wissenschaft, HIGHLIGHTS, 03/2019.
D. Huff, I. Greis. *How to lie with statistics*, W. W. Norton & Company, 1993.
S. D. Levitt, S. J. Dubner. *Freakonomics*, Harper, new international edition, 2009.