



Planet Nuschel

Professor Hamming hat einen neuen Planeten mit Lebewesen entdeckt. Mühselig hat er den Bewohnern unsere Sprache beigebracht. Sie sagten ihm, dass der Planet „Nuschel“ heißt.

Entweder beherrschen die Nuschelwesen noch nicht ganz unsere Sprache oder durch ein Rauschen im Funkverkehr verzerren sich die Buchstaben, denn Professor Hamming erhält auch Nachrichten, die er nicht versteht. Zum Beispiel war die erste Nachricht, die er erhalten hat:

DNS PFERD KRISQT LEINEN GURKENCALAP

Hamming konnte die Nachricht nicht eindeutig entschlüsseln. Der korrekte Satz lautet: „Das Pferd frisst keinen Gurkensalat.“ Aber der Satz hätte genauso gut lauten können: „Das Pferd kriegt seinen Gurkensalat.“

Hamming fängt an, die Fehler zu untersuchen. Er bemerkt, dass die Länge der Wörter fehlerfrei übertragen wird. Für zwei Wörter derselben Länge betrachtet er die Anzahl der Stellen, an denen die Buchstaben nicht gleich sind und bezeichnet diese Zahl als den *Hamming-Abstand*. Alternativ kann man den Hamming-Abstand auch verstehen als die Anzahl der Buchstaben, die man ändern muss, um von einem Wort zum anderen zu gelangen. Bei DNS und DAS muss man die zweite Stelle von einem N zu einem A ändern, d.h. der Hamming-Abstand von DNS zu DAS ist 1. Oder der Hamming-Abstand von KRISQT und FRISST ist 2, da sich der erste und der fünfte Buchstabe unterscheiden.

- ④ **Aufgabe 1 (Hieroglyphen*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Der Hamming-Abstand ist nicht nur auf Buchstaben beschränkt. Man kann diesen auch auf beliebige Zeichenfolgen der gleichen Länge anwenden. So ist der Hamming-Abstand von 1234 und 1226 zum Beispiel 2, da die letzten beiden Stellen verschieden sind. Was ist der Hamming-Abstand der beiden Zeichenfolgen:



- ④ **Aufgabe 2 (Hamming-Abstand 1*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Gib zwei deutsche Sätze an, die verschiedenen Inhalt haben, aber wo in jedem Wort maximal ein Buchstabe anders ist. Zum Beispiel: „Die Maus ist tot.“ und „Die Laus ist rot.“

Hinweis. Für jedes veränderte Wort gibt es einen Punkt.

- ④ **Aufgabe 3 (Repetitionscode*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Professor Hamming hat eine Idee um trotz der Fehler bei der Übertragung die korrekten Wörter besser zu entschlüsseln. Er lässt jeden Buchstaben doppelt schicken. Dann empfängt er statt dem Wort HALLO nun die Zeichenfolge HHAALLLLOO.

Wie verändert sich der Hamming-Abstand von zwei Wörtern, wenn man jeden Buchstaben verdoppelt?

Thema vom 1. Februar 2019. Einsenden der Lösungen bis 22. März 2019.

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg

<http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Allgemeine Informationen zur Teilnahme: <http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>

Allgemeine Hinweise zum Lösen von Aufgaben: <http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>

☐ **Aufgabe 4 (Fehler erkennen und korrigieren**** (empfohlen ab Klasse 9) [2+2 Punkte]).

Wie in Aufgabe 3 lässt Professor Hamming die Nuschelwesen jedes Zeichen doppelt senden. Wenn er nun die Zeichenfolge BBADLLLL erhält, weiß er, dass es bei der Übertragung einen Fehler gab. Er kann die Zeichenfolge nämlich in zweier Blöcke zerlegen: BB, AD, LL, LL. Bei einer fehlerfreien Übertragung sind die Buchstaben in den zweier Blöcken gleich.

1. Angenommen pro übertragenem Wort gibt es maximal zwei Fehler. Kann Professor Hamming dann immer erkennen, ob es einen Fehler in der Übertragung gab? Begründe deine Antwort.
2. Professor Hamming lässt nun jeden Buchstaben fünfmal schicken. Angenommen pro übertragenem Wort gibt es immer noch nur maximal zwei Fehler. Zeige, dass Professor Hamming jeden Fehler erkennen und sogar korrigieren kann.

☐ **Aufgabe 5 (ISBN**** [1+1+2 Punkte]).

Die meisten Bücher, die man kaufen kann, haben eine internationale Standardbuchnummer (kurz ISBN). In dieser Aufgabe arbeiten wir mit dem alten Standard ISBN-10. Eine ISB-Nummer besteht aus 10 Ziffern. Die ersten neun Ziffern können eine Zahl zwischen 0–9 sein. Die letzte Ziffer kann zusätzlich ein X sein, das für die Zahl 10 steht. Nun ist die Zeichenfolge

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 z_{10}$$

ein gültiger ISBN-Code wenn die Zahl

$$1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 + 4 \cdot z_4 + \dots + 9 \cdot z_9 + 10 \cdot z_{10}$$

durch 11 teilbar ist.

1. Ist die folgende Zeichenfolge eine ISB-Nummer: 3–66248–955–4?
2. Welchen Wert muss $\boxed{?}$ haben, damit 1–54241– $\boxed{?}$ 82–8 eine ISB-Nummer ist?
3. Was ist der minimale Hamming-Abstand, den zwei ISB-Nummern haben können?

☐ **Aufgabe 6 (Dreiecksungleichung***** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]).

Es seien $X = x_1 x_2 \dots x_n$, $Y = y_1 y_2 \dots y_n$ und $Z = z_1 z_2 \dots z_n$ Wörter der Länge n . Zeige, dass der Hamming-Abstand die sogenannte Dreiecksungleichung erfüllt, d.h. der Hamming-Abstand von X zu Z ist kleiner gleich als die Summe der Hamming-Abstände von X zu Y und von Y zu Z .

Zum Beispiel ist der Hamming-Abstand von FRISST zu KRISQT und der Hamming-Abstand von KRISQT zu KRIEGT jeweils 2. Der Hamming-Abstand von FRISST zu KRIEGT ist 3. Offensichtlich gilt $3 \leq 2 + 2$.

Hinweis. Für eine einfachere Notation darf man den Fall $n = 4$ annehmen.