Die verflixte 9 – Lösungen

Aufgabe 1 (Spiegelzahlen* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Zahlen wie z.B. 357 753 oder 2 481 842, die sich durch Umkehrung der Ziffernfolge nicht ändern, wollen wir *Spiegelzahlen* nennen.

1. Bestimme die größte Zahl n mit folgender Eigenschaft: Die ersten n Vielfachen von 13 kannst du mit 77 multiplizieren, so dass du eine Spiegelzahl erhältst.
2. Bestimme die größte Zahl m mit folgender Eigenschaft: Die ersten m Vielfachen von 73 kannst du mit 137 multiplizieren, so dass du eine Spiegelzahl erhältst.
3. Gib den Grund dafür an, warum es im ersten Teil genau n Vielfache von 13 und im zweiten genau m Vielfache von 73 mit der beschriebenen Eigenschaft gibt.

   Hinweis. Vielleicht hilft es, eines der älteren Themenblätter des Schülerzirkels einmal anzuschauen.

Lösung. *Zu 1.* Die größte solche Zahl ist 9, denn: Man rechnet leicht nach, dass $1 \cdot 13 \cdot 77$, $\ldots$, $9 \cdot 13 \cdot 77$ Spiegelzahlen sind, aber

$$10 \cdot 13 \cdot 77 = 10010$$

ist *keine* Spiegelzahl.

Zu 2. Die größte solche Zahl ist ebenfalls 9, denn: Man rechnet leicht nach, dass $1 \cdot 73 \cdot 137$, $\ldots$, $9 \cdot 73 \cdot 137$ Spiegelzahlen sind, aber

$$10 \cdot 73 \cdot 137 = 100010$$

ist *keine* Spiegelzahl.

Zu 3. Es gilt $13 \cdot 77 = 1001$ beziehungsweise $73 \cdot 137 = 10001$. Beide Produkte kann man mit allen Ziffern von 1 bis 9 multiplizieren, um eine Spiegelzahl zu erhalten (mit zwei bzw. drei Nullen in der Mitte).

Aufgabe 2 (Dreistellige Zahl raten* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Denke dir eine dreistellige Zahl (z.B. 815), bei der die erste Ziffer größer als die letzte ist. Bilde nun die Zahl in umgekehrter Ziffernfolge (also 518) und subtrahiere die umgedrehte von der ursprünglichen Zahl.

Nenne mir die erste Stelle (Hunderterstelle) dieser Differenz (im Beispiel 2). Dann kann ich Dir auch die Zehnerstelle und die Einerstelle der Differenz nennen.

Wie funktioniert dieser Trick?

Lösung. Die mittlere Ziffer ist in jedem Fall 9 und die Summe der ersten und der letzten Ziffer ist ebenfalls 9, denn: Sei $h \cdot 100 + z \cdot 10 + e$ die gedachte Zahl mit $h, z, e \in \{0, \ldots, 9\}$ und $h > e$. Dann ist die Differenz (wegen $h > e$)

$$h \cdot 100 + z \cdot 10 + e - (e \cdot 100 + z \cdot 10 + h) = (h - e) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9 - (h - e).$$

Es gibt also nur die Differenzen 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 und 891. Somit genügt es im Beispiel ($815 - 518 = 297$) die Hunderterstelle 2 zu nennen, um die ganze Zahl zu kennen.

Aufgabe 3 (Vierstellige Zahl raten** [4 Punkte]). Denke dir eine vierstellige Zahl (z.B. 4273). Lass zuerst die letzte Ziffer weg (427), dann die vorletzte (42) und schließlich noch die drittletzte (in diesem Fall bleibt also die 4). Addiere nun die drei entstandenen Zahlen, multipliziere diese Summe mit 9 und addiere schließlich zum Ergebnis noch die Quersumme der ursprünglichen Zahl.

Welche Zahl erhält man als Ergebnis? Begründe, warum das für alle vierstelligen Zahlen so ist!

Lösung. Im Beispiel ist $427 + 42 + 4 = 473$. Multiplikation dieser Summe mit 9 liefert 4257. Addiert man zu dieser Zahl die Quersumme von 4273, nämlich 16, erhält man 4273. Dies ist die ursprünglich gedachte Zahl!

Allgemein gilt: Wenn $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$ die Ausgangszahl ist, so werden zunächst die Zahlen $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, $10 \cdot a + b$ und a gebildet. Die Summe dieser drei Zahlen ist

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c + 10 \cdot a + b + a = 111 \cdot a + 11 \cdot b + c.$$

Multiplikation mit 9 liefert $999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c$. Addiert man hierzu die Quersumme der Ausgangszahl, also $a + b + c + d$, erhält man $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$, was die Ausgangszahl ist.

Aufgabe 4 (Zwei sechsstellige Zahlen** [4 Punkte]). Denke dir zwei dreiziffrige Zahlen (z.B. 281 und 749) und stelle sie zu zwei sechsstelligen Zahlen zusammen, indem du die erste einmal vor (281 749) und einmal hinter die zweite setzt (749 281). Bilde nun die Differenz dieser beiden sechsstelligen Zahlen und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der ursprünglichen beiden Ausgangszahlen.

Welche Zahl kommt dabei immer heraus? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Im Beispiel: Für die beiden gewählten Zahlen 281 und 749 ist die Differenz 468. Für die beiden gebildeten sechsstelligen Zahlen 749 281 und 281 749 ist die Differenz 467 532. Bei der entsprechenden Division der beiden Differenzen erhält man 999.

Dies gilt auch allgemein, denn: Sind p und q die beiden dreistelligen Zahlen (mit $p > q$), so sind die beiden sechsstelligen Zahlen $1000 \cdot p + q$ und $1000 \cdot q + p$. Die Differenz der dreistelligen Zahlen ist $p - q$ und die Differenz der beiden sechsstelligen Zahlen ist

$$1000 \cdot (p - q) - (p - q) = (p - q) \cdot (1000 - 1).$$

Bei Division durch $p - q$ bleibt somit $1000 - 1 = 999$.

Aufgabe 5 (Weggelassene Zahl raten*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Wähle eine beliebige natürliche Zahl (z.B. 214), bilde daraus durch Umstellen der Ziffern zwei weitere Zahlen (z.B. 142 und 124) und addiere diese drei Zahlen. Quadriere anschließend diese Summe und notiere dir das Ergebnis.

Lies mir nun die Ziffern des Ergebnisses in einer beliebigen Reihenfolge vor, wobei du eine Zahl (aber keine 9!) weglassen darfst. Ich kann dir nun die weggelassene Zahl sagen!

Wie funktioniert dieser Trick?

Lösung. Im Beispiel: Wir bilden $214 + 142 + 124 = 480$. Das Quadrat der Summe ist $230\,400$. Nun könnte beispielsweise $0, 0, 0, 2, 3$ vorgelesen werden (die 4 wird also weggelassen). Addiert man nun alle Ziffern, erhält man $2 + 3 = 5$. Bei der Summe 5 fehlen noch 4 auf die 9 und diese 4 ist die weggelassene Zahl!

Allgemein gilt: Hat die erste Zahl die Form $9 \cdot n_1 + r$, so lassen sich die anderen beiden Zahlen als $9 \cdot n_2 + r$ und $9 \cdot n_3 + r$ schreiben, da der Neunerrest in allen Fällen der gleiche ist (Quersummenkriterium für Division durch 9). Die Summe ist dann also

$$9 \cdot (n_1 + n_2 + n_3) + 3 \cdot r$$

und damit insbesondere durch 3 teilbar. Dann ist aber das Quadrat dieser Zahl durch 9 teilbar, d.h. ihr Neunerrest ist 0.

Aufgabe 6 (Nachbarzahlen*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Wähle eine beliebige natürliche Zahl (z.B. 184) und nimm noch die vorhergehende und die nachfolgende Zahl (also 183 und 185). Multipliziere nun diese drei Nachbarzahlen miteinander und quadriere anschließend das Produkt.

Sage mir vom Ergebnis nun alle Ziffern, wovon du wieder eine (aber keine 9) weglassen darfst. Ich kann dir die weggelassene Zahl sagen!

Wie funktioniert dieser Trick?

Lösung. Auch hier geht es – wie bei Aufgabe 5 – wieder um Neunerreste. Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets eine durch 3 teilbar, also ist auch das Produkt dieser drei „Nachbarzahlen“ immer durch 3 teilbar. Damit ist das Quadrat dieses Produkts durch 9 teilbar. Bei den vorgelesenen Ziffern müssen weder Nullen noch Neuner beachtet werden. Die Differenz der Summe der vorgelesenen Zahlen zum nächsten Vielfachen von 9 ist also wieder die weggelassene Ziffer.