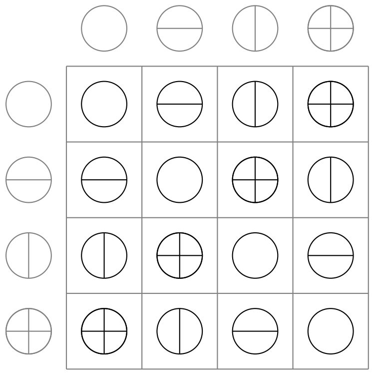
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Abrakadalgebra

Vom Hut zum Hasen und zurück

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1 (Vierer-Trickkiste*). Die Tabelle

	○	⊖	⦶	⊕
○	○	⊖	⦶	⊕
⊖	⊖	○	⊕	⦶
⦶	⦶	⊕	○	⊖
⊕	⊕	⦶	⊖	○

definiert eine Trickkiste.

1. Welcher Zauberspruch ist der langweilige Zauberspruch?

Thema vom 13. März 2015. Einsenden der Lösungen bis 8. Mai 2015.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

2. Welcher Zauberspruch ist der Anti-Zauberspruch von $\oplus$?
3. Welche Stärke hat der Zauberspruch $\ominus$?
4. Ist diese Trickkiste eine Kopie von T_4 ?

Begründe jeweils Deine Antwort!

Lösung.

1. In diesem Fall ist $\bigcirc$ der langweilige Zauberspruch, denn: Laut Tabelle gilt

$$\begin{aligned} &\bigcirc \circ \bigcirc = \bigcirc, \quad &&\bigcirc \circ \ominus = \ominus, \quad &&\bigcirc \circ \varobar = \varobar, \quad &&\bigcirc \circ \oplus = \oplus, \\ &\bigcirc \circ \bigcirc = \bigcirc, \quad &&\ominus \circ \bigcirc = \ominus, \quad &&\varobar \circ \bigcirc = \varobar, \quad &&\oplus \circ \bigcirc = \oplus. \end{aligned}$$

   Alternativ kann man auch wie folgt vorgehen: Sei ℓ der langweilige Zauberspruch dieser Trickkiste und sei $\CIRCLE$ der Anti-Zauberspruch von $\bigcirc$. Laut der Tabelle gilt

$$\bigcirc \circ \bigcirc = \bigcirc.$$

   Verknüpfen wir beide Seiten dieser Gleichung von links mit $\CIRCLE$, so erhalten wir $\CIRCLE \circ (\bigcirc \circ \bigcirc) = \CIRCLE \circ \bigcirc$, und damit

$$\bigcirc = \ell \circ \bigcirc = (\CIRCLE \circ \bigcirc) \circ \bigcirc = \CIRCLE \circ (\bigcirc \circ \bigcirc) = \CIRCLE \circ \bigcirc = \ell.$$

   (Wegen der Eindeutigkeit langweiliger Zaubersprüche kann es natürlich in dieser Trickkiste keinen weiteren langweiligen Zauberspruch geben.)

2. Der Anti-Zauberspruch von $\oplus$ ist $\oplus$, denn: Nach dem ersten Teil ist $\bigcirc$ der langweilige Zauberspruch und laut der Tabelle gilt

$$\oplus \circ \oplus = \bigcirc.$$

3. Der Zauberspruch $\ominus$ hat die Stärke 2, denn: Es ist $\ominus$ nicht der langweilige Zauberspruch (denn $\bigcirc$ ist nach dem ersten Teil der langweilige Zauberspruch); also ist die Stärke von $\ominus$ größer als 1. Andererseits ist laut der Tabelle

$$\ominus^2 = \ominus \circ \ominus = \bigcirc,$$

   und damit hat $\ominus$ Stärke höchstens 2. Also hat $\ominus$ die Stärke 2.

4. Diese Trickkiste ist *keine* Kopie von T_4, denn: *Angenommen,* diese Trickkiste wäre eine Kopie von T_4. Da die Stärke von Zaubersprüchen unter Kopien erhalten bleibt und T_4 einen Zauberspruch der Stärke 4 enthält, müsste dann auch diese Trickkiste einen Zauberspruch der Stärke 4 enthalten. Analog zum dritten Teil kann man sich aber überlegen, dass $\varobar$ und $\oplus$ die Stärke 2 haben. Da der langweilige Zauberspruch auch nicht Stärke 4 hat, folgt, dass diese Trickkiste keinen Zauberspruch der Stärke 4 enthält. Also ist diese Trickkiste keine Kopie von T_4.

Aufgabe 2 (Abra-Ka-Da-Bra*). Zeige, dass die folgenden Tabellen jeweils *nicht* zu einer Trickkiste mit den vier verschiedenen Zaubersprüchen $\mathsf{a}, \mathsf{k}, \mathsf{b}, \mathsf{d}$ vervollständigt werden können:

	a	k	d	b
a		a		
k				
d		b		
b				

	a	k	d	b
a		a		
k				
d	d			
b				

Hinweis. Wieviele langweilige Zaubersprüche kann eine Trickkiste haben?

Lösung. *Angenommen,* es handelt sich bei diesen Tabellen um Teile von Trickkisten. Dann gibt es jeweils einen langweiligen Zauberspruch ℓ und zu jedem Zauberspruch z einen zugehörigen Anti-Zauberspruch $\overline{z}$ in der jeweiligen Trickkiste.

In beiden Tabellen folgt dann wegen $\mathsf{a} \circ \mathsf{k} = \mathsf{a}$, dass

$$\mathsf{k} = \ell \circ \mathsf{k} = (\overline{\mathsf{a}} \circ \mathsf{a}) \circ \mathsf{k} = \overline{\mathsf{a}} \circ (\mathsf{a} \circ \mathsf{k}) = \overline{\mathsf{a}} \circ \mathsf{a} = \ell.$$

Also wäre in beiden Fällen k jeweils der langweilige Zauberspruch.

1. In der ersten Tabelle würde dann aber

   $$\mathsf{d} = \mathsf{d} \circ \mathsf{k} = \mathsf{b}$$

   folgen, im Widerspruch dazu, dass d und b als verschieden vorausgesetzt sind.

2. In der zweiten Tabelle folgt analog zu oben aus $\mathsf{d} = \mathsf{d} \circ \mathsf{a}$, dass auch a ein langweiliger Zauberspruch ist. Da aber jede Trickkiste nur genau einen langweiligen Zauberspruch enthält, wäre dann bereits $\mathsf{a} = \mathsf{k}$, im Widerspruch dazu, dass a und k als verschieden vorausgesetzt sind.

Also können die beiden Tabellen nicht zu Trickkisten vervollständigt werden.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit von Anti-Zaubersprüchen*). Sei T eine Trickkiste bezüglich der Verknüpfung $\circ$ und sei ℓ der langweilige Zauberspruch von T.

1. Zeige: Jeder Zaubertrick z aus T besitzt nur einen einzigen Anti-Zauberspruch $\overline{z}$ aus T mit $z \circ \overline{z} = \ell = \overline{z} \circ z$.

2. Was ist der Anti-Zauberspruch des langweiligen Zauberspruchs? Begründe Deine Antwort!

Lösung.

1. Sei z ein Zauberspruch aus T. Nach Definition von Trickkisten besitzt z mindestens einen Anti-Zauberspruch $\overline{z}$ in T. Warum kann es nur einen Anti-Zauberspruch von z geben? Sei $x \in T$ ein Anti-Zauberspruch von z. Dann gilt
$$x = x \circ \ell = x \circ (z \circ \overline{z}) = (x \circ z) \circ \overline{z} = \ell \circ \overline{z} = \overline{z}.$$
Also ist $x = \overline{z}$, d.h. außer $\overline{z}$ kann z keinen weiteren Anti-Zauberspruch in T besitzen.

2. Wegen $\ell \circ \ell = \ell$ folgt, dass ℓ sein eigener Anti-Zauberspruch ist.

Aufgabe 4 (Abraquadrata**). Zauberer Bela besitzt eine endliche Trickkiste T mit folgender Eigenschaft: Für alle Zaubersprüche w und z aus T gilt
$$w \circ z = z \circ w,$$
d.h. es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge man Zaubersprüche aus T ausführt. Bela behauptet nun: Bildet er die Quadrate $z_1^2, \ldots, z_n^2$ aller Zaubersprüche $z_1, \ldots, z_n$ aus T und führt er diese hintereinander aus (d.h. $z_1^2 \circ \cdots \circ z_n^2$), so erhält er – simsalabim! – den langweiligen Zauberspruch von T.

1. Rechne nach, dass dies für T_3, T_4, T_5 und für die Trickkiste aus Aufgabe 1 gilt.

2. Gib dann ein allgemeingültiges Argument für Belas Behauptung.

   Hinweis. Was passiert, wenn ein Zauberspruch sein eigener Anti-Zauberspruch ist? Was, wenn nicht?

Lösung.

1. Offenbar erfüllen die Trickkisten T_3, T_4, T_5 und die Trickkiste aus Aufgabe 1 die geforderte Vertauschungseigenschaft.

   In T_3 gilt $0^2 = 0$, $1^2 = 2$, $2^2 = 1$, und damit
$$0^2 \circ 1^2 \circ 2^2 = 0 \circ 2 \circ 1 = 2 \circ 1 = 0.$$
   In T_4 gilt
$$0^2 \circ 1^2 \circ 2^2 \circ 3^2 = 0 \circ 2 \circ 0 \circ 2 = 2 \circ 2 = 0.$$
   In T_5 gilt
$$0^2 \circ 1^2 \circ 2^2 \circ 3^2 \circ 4^2 = 0 \circ 2 \circ 4 \circ 1 \circ 3 = 2 \circ 4 \circ 1 \circ 3 = 0.$$
   In der Trickkiste aus Aufgabe 1 gilt (und $\bigcirc$ ist der langweilige Zauberspruch)
$$\bigcirc^2 \circ \ominus^2 \circ \obar^2 \circ \oplus^2 = \bigcirc \circ \bigcirc \circ \bigcirc \circ \bigcirc = \bigcirc.$$

2. Zu $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $\overline{j} \in \{1, \dots, n\}$ so gewählt, dass $z_{\overline{j}}$ der Anti-Zauberspruch von z_j in T ist. Da jeder Zauberspruch in T nach Aufgabe 3 genau einen Anti-Zauberspruch besitzt und der Anti-Anti-Zauberspruch wieder der Zauberspruch selbst ist, folgt, dass in der Folge $\overline{1}, \dots, \overline{n}$ jede der Zahlen $1, \dots, n$ genau einmal auftritt.

   Da es nach Voraussetzung keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge Zaubersprüche aus T ausgeführt werden (und da die Gruppenverknüpfung assoziativ ist), erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
z_1^2 \circ \dots \circ z_n^2 &= z_1 \circ z_1 \circ \dots \circ z_n \circ z_n \\
&= (z_1 \circ z_2 \circ \dots \circ z_n) \circ (z_1 \circ z_2 \circ \dots \circ z_n) \\
&= (z_1 \circ z_2 \circ \dots \circ z_n) \circ (z_{\overline{1}} \circ z_{\overline{2}} \circ \dots \circ z_{\overline{n}}) \\
&= z_1 \circ z_{\overline{1}} \circ \dots \circ z_n \circ z_{\overline{n}} \\
&= \ell \circ \dots \circ \ell \\
&= \ell.
\end{aligned}$$

   wie behauptet. ◫

Aufgabe 5 (Stärke von Zaubersprüchen**). Sei T eine endliche Trickkiste mit genau n Zaubersprüchen und sei z ein Zauberspruch der Stärke s aus T. Ist x ein Zauberspruch in T, so betrachten wir die Menge

$$T_x := \{x \circ z^0, x \circ z^1, \dots, x \circ z^{s-1}\}$$

von Zaubersprüchen von T.

1. Zeige, dass z nicht unendlich stark sein kann.

2. Betrachte das Beispiel der Trickkiste $T = T_6$ und den Zauberspruch $z = 2$ in T. Bestimme T_x für alle Zauber x in T.

3. Seien nun x und y Zaubersprüche in T. Zeige allgemein: Falls T_x und T_y ein gemeinsames Element enthalten, so sind T_x und T_y bereits gleich (d.h. jedes Element von T_x liegt auch in T_y und umgekehrt).

4. Folgere, dass die Stärke s von z ein Teiler von n ist.

Lösung. Sei ℓ der langweilige Zauberspruch von T.

1. Die Zaubersprüche $z^0, \dots, z^n$ liegen alle in T. Da T genau n Zaubersprüche enthält und diese Auflistung $n+1$ Zaubersprüche enthält, müssen mindestens zwei dieser Zaubersprüche gleich sein. Also gibt es $j, k \in \{0, \dots, n\}$ mit $j < k$ und

$$z^k = z^j.$$

Daher folgt, dass $k-j$ eine natürliche Zahl größer als 0 mit

$$z^{k-j} = z^{k-j} \circ \ell = z^{k-j} \circ z^j \circ \overline{z^j} = z^k \circ \overline{z^j} = z^k \circ \overline{z^k} = \ell$$

ist. Somit ist die Stärke von z endlich (genauer gesagt ist die Stärke von z höchstens $k-j \leq n$).

2. In diesem Beispiel ist

$$z^0 = 0, \quad z^1 = 2, \quad z^2 = 4, \quad z^3 = 0,$$

Also hat z die Stärke 3 und es ist

$$\begin{aligned}
(T_6)_0 &= \{0 \circ z^0, 0 \circ z^1, 0 \circ z^2\} \\
&= \{0 \circ 0, 0 \circ 2, 0 \circ 4\} = \{0, 2, 4\} \\
(T_6)_1 &= \{1 \circ 0, 1 \circ 2, 1 \circ 4\} = \{1, 3, 5\} \\
(T_6)_2 &= \{2 \circ 0, 2 \circ 2, 2 \circ 4\} = \{2, 4, 0\} = \{0, 2, 4\} \\
(T_6)_3 &= \{3 \circ 0, 3 \circ 2, 3 \circ 4\} = \{3, 5, 1\} = \{1, 3, 5\} \\
(T_6)_4 &= \{4 \circ 0, 4 \circ 2, 4 \circ 4\} = \{4, 0, 2\} = \{0, 2, 4\} \\
(T_6)_5 &= \{5 \circ 0, 5 \circ 2, 5 \circ 4\} = \{5, 1, 3\} = \{1, 3, 5\}.
\end{aligned}$$

3. Falls T_x und T_y ein gemeinsames Element enthalten, so gibt es nach Definition dieser Mengen $k_x, k_y \in \{0, \dots, s-1\}$ mit

$$x \circ z^{k_x} = y \circ z^{k_y}.$$

Sei nun $k \in \{0, \dots, s-1\}$. Wir zeigen, dass dann $x \circ z^k$ auch in T_y liegt: Da $s \geq 1$ ist, gibt es eine natürliche Zahl r_x mit

$$k + r_x \cdot s \geq k_x;$$

also gibt es eine natürliche Zahl m mit $k + r_x \cdot s = k_x + m$. Dann folgt

$$z^k = z^k \circ \ell^{r_x} = z^k \circ (z^s)^{r_x} = z^k \circ z^{r_x \cdot s} = z^{k + r_x \cdot s} = z^{k_x + m} = z^{k_x} \circ z^m.$$

Andererseits gibt es (Division mit Rest von $k_y + m$ durch s) natürliche Zahlen $k' \in \{0, \dots, s-1\}$ und r_y mit

$$k_y + m = k' + r_y \cdot s$$

und analog zu eben folgt

$$z^{k_y} \circ z^m = z^{k'}.$$

Wegen $x \circ z^{k_x} = y \circ z^{k_y}$ erhalten wir insgesamt

$$x \circ z^k = x \circ z^{k_x} \circ z^m = y \circ z^{k_y} \circ z^m = y \circ z^{k'}.$$

Nach Definition von T_y liegt somit $x \circ z^k = y \circ z^{k'}$ in T_y.

Analog zeigt man, dass jedes Element von T_y in T_x liegt. Also sind die Mengen T_x und T_y gleich.

4. Ist x ein Zauberspruch von T, so enthält T_x genau s Elemente, denn: Nach Definition enthält T_x höchstens s Elemente. Sind $j, k \in \{0, \dots, s-1\}$ mit $j < k$, so ist $z^k \neq z^j$, denn sonst kann man wie im ersten Teil argumentieren und folgern, dass $z^{k-j} = \ell$ ist, obwohl $k - j > 0$ echt kleiner als die Stärke s von z ist. Dann ist auch $x \circ z^k \neq x \circ z^j$ wie man leicht sieht, indem man mit dem Anti-Zauberspruch von x von links verknüpft. Also enthält T_x genau s Elemente.

   Ist x ein Zauberspruch von T, so liegt $x = x \circ z^0$ in T_x. Nach dem dritten Teil gibt es somit Zaubersprüche $x_1, \dots, x_r$ in T, so dass folgendes gilt:

   - Jeder Zauberspruch von T liegt in genau einer der Mengen $T_{x_1}, \dots, T_{x_r}$.

   Damit folgt aber, dass T genau $r \cdot s$ Elemente enthält, d.h. $n = r \cdot s$. Insbesondere ist s ein Teiler von n.

Aufgabe 6 (Trick 17***). Zauberer Zyklus hat eine Trickkiste mit genau 17 Zaubersprüchen entwickelt. Sein übler Zwillingsbruder Zuklys behauptet wenig später, auch eine Trickkiste mit genau 17 Zaubersprüchen entdeckt zu haben. Zyklus beschuldigt Zuklys daraufhin des Diebstahls und dass die Trickkiste von Zuklys einfach nur eine Kopie von der von Zyklus sei. Zuklys behauptet jedoch, dass dies nicht der Fall sei.

Wer hat recht? D.h. wieviele Trickkisten mit genau 17 Zaubersprüchen gibt es (bis auf Kopien) überhaupt? Begründe Deine Antwort!

Hinweis. Verwende Aufgabe 5 ...

Lösung. Es gibt (bis auf Kopien) nur genau eine Trickkiste mit genau 17 Zaubersprüchen, nämlich T_{17}, denn: Sei T eine Trickkiste mit genau 17 Zaubersprüchen. Insbesondere enthält T dann einen Zauberspruch z, der *nicht* langweilig ist. Sei s die Stärke von z. Nach Aufgabe 5 ist dann s ein Teiler von 17. Da 17 eine Primzahl ist, können nur die Fälle $s = 1$ oder $s = 17$ auftreten. Nach Wahl von z ist z nicht langweilig, und somit $s \neq 1$. Also ist $s = 17$.

Analog zum ersten Teil von Aufgabe 5 kann man nun zeigen, dass die Zaubersprüche $z^0, \dots, z^{16}$ alle verschieden sind. Die Umbenennung

$$\begin{aligned} T_{17} &\longrightarrow T \\ j &\longmapsto z^j \end{aligned}$$

zeigt dann, dass T eine Kopie von T_{17} ist.

Ist nun T' eine weitere Trickkiste mit genau 17 Zaubersprüchen, so ist auch T' eine Kopie von T_{17}, und man überzeugt sich leicht davon, dass dann auch T und T' Kopien voneinander sind.

Insbesondere ist die Trickkiste von Zuklys eine Kopie der Trickkiste von Zyklus, d.h. Zyklus hat Recht.

Epilog: Bezüge zur Gruppentheorie

Die Regeln für Trickkisten entsprechen genau den Axiomen für sogenannte Gruppen. Gruppen liefern einen formalen Rahmen, um Symmetrien aller Art zu beschreiben und zu untersuchen. Gruppen spielen daher in vielen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle. Unsere Begriffe über Trickkisten haben in der Gruppentheorie die folgenden Entsprechungen:

Abrakadalgebra	Gruppentheorie
Trickkiste	Gruppe
Zauberspruch	Gruppenelement
langweiliger Zauberspruch	neutrales Element
Anti-Zauberspruch	inverses Element
Stärke eines Zauberspruchs	Ordnung eines Elements
Zeitzauber-Trickkiste T_n	zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n$
Kopie einer Trickkiste	isomorphe Gruppe
Umordnungstrickkiste U_n	Permutationsgruppe S_n

Weiterführende Links

http://de.wikipedia.org/wiki/Gruppentheorie
http://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber
http://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle