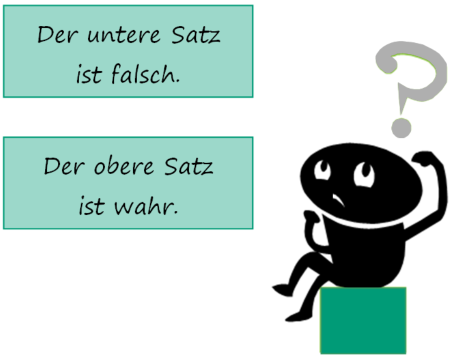
Schülerzirkel Mathematik

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

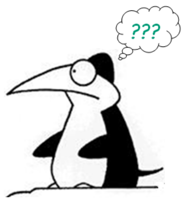


Ist doch logisch!

Eine Einführung in die Aussagenlogik

Die Logik ist ein Grundpfeiler der modernen Mathematik. Sie bildet die Grundlage für alle Bereiche der Mathematik und Digitalelektronik und damit auch der modernen Computertechnik.
In der mathematischen Logik geht es allerdings weniger darum, ob gewisse Dinge logisch erscheinen – wie der Begriff der Logik häufig im Alltag verwendet wird – sondern um eine Präzisierung der mathematischen Sprache.
Alle verwendeten Ausdrücke bei der Formulierung mathematischer Sachverhalte müssen eine klare, scharf definierte Bedeutung haben. Dies steht klar im Gegensatz zur Alltagssprache, in der es oftmals mehrdeutige Formulierungen gibt, bei denen man sich im Nachhinein oft mit „aber das war doch ganz anders gemeint“herausreden kann.
Die Grundlage mathematischer Formulierungen sind Aussagen, weshalb im Zusammenhang mit mathematischer Logik die sogenannte Aussagenlogik von großer Bedeutung ist.

Knobelaufgabe



Pinguine sind schwarz-weiß. Alte Filme sind schwarz-weiß.
Also sind Pinguine alte Filme.
Was ist bei dieser Aussage schiefgelaufen?

Thema vom 14. März 2014. Einsenden der Lösungen bis 09. Mai 2014.

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

1 Was ist überhaupt eine „Aussage“?

Eine Aussage ist ein feststellender Satz, dem eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zugeordnet werden kann.
Aussagen können also nicht gleichzeitig wahr und falsch sein und es gibt außer wahr und falsch auch keine dritte Möglichkeit.

Beispiel 1.

1. Aussagen können beispielsweise den Bereich der Mathematik betreffen:
   Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$. (w)

2. Ebenso sind aber auch Aussagen in anderen Bereichen möglich:
   „Der 14. März 2014 ist ein Freitag.“ (w)
   „Jeder Hund hat ein schwarzes Fell.“ (f)

Bei den oben genannten Sätzen kann man eindeutig entscheiden, ob sie wahr (w) oder falsch (f) sind. Es handelt sich also um Aussagen.
Bei vielen alltäglichen Sätzen ist es oft schwer oder gar unmöglich eindeutig zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist, wie beispielsweise bei: „Dieses Bild ist schön“ oder „Heute ist Dienstag“. Ob diese Sätze wahr oder falsch sind, ist subjektiv (Schönheit) bzw. hängt vielmehr vom Kontext ab, in dem sie geäußert werden (an welchem Tag). Hierbei handelt es sich also streng genommen nicht um Aussagen im Sinne der Logik, da sie nicht wahrheitsfähig sind. Auch Fragen, Befehle und Satzfragmente sind keine Aussagen.

2 Verknüpfung von Aussagen durch Junktoren

Oft werden zur Formulierung mathematischer Aussagen Symbole verwendet, um die Formulierungen übersichtlich und knapp darstellen zu können. Einzelne Aussagen werden meist mit großen Buchstaben (A, B, $C\dots$) bezeichnet. Neue Aussagen erhält man, wenn man Aussagen durch sogenannte Junktoren miteinander verknüpft. Ein sehr wichtiger Junktor ist die *Nicht-Verknüpfung*, die jede Aussage in ihr Gegenteil umkehrt. Diese Negation (Verneinung) einer Aussage A wird mit dem Symbol $\neg A$ dargestellt.

Beispiel 2. Negation (Verneinung)
Bezeichnen wir z.B. die Aussage „der 14. März 2014 ist ein Freitag“als Aussage A, so lautet die Aussage $\neg A$: „Der 14. März 2014 ist kein Freitag“.
Die Aussage $\neg A$ ist genau dann falsch, wenn A wahr ist und umgekehrt.

Ein praktisches Hilfsmittel zur übersichtlichen Darstellung solcher Sachverhalte sind Wahrheitstafeln (w steht für *wahr*, f für *falsch*):

A	**¬A**
w	f
f	w

Meist sind jedoch nicht nur einzelne Aussagen interessant, sondern besonders deren Verknüpfung oder Zusammenhang. Die Aussagenlogik beschreibt nun die Verknüpfung gegebener Aussagen durch Begriffe wie *und*, *oder*, *wenn... dann*, *genau dann, wenn...* Auch für diese Junktoren gibt es in der Mathematik jeweils Symbole.

Beginnen wir mit der einfachsten Verknüpfung zweier Aussagen, der *Und-Verknüpfung*, die üblicherweise durch folgendes Zeichen dargestellt wird: $\wedge$
Die Aussage $A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. In allen anderen drei Fällen ist sie falsch, siehe Wahrheitstafel:

A	**B**	**A ∧ B**
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel 3. Konjunktion (Und-Verknüpfung)
Die Aussage „Delfine sind Säugetiere und Haie sind Fische“ kann nur stimmen, wenn auch wirklich beide Teilaussagen erfüllt sind. Die Gesamtaussage ist falsch, sobald mindestens eine der Teilaussagen falsch ist.

Eine weitere Möglichkeit zwei Aussagen zu verbinden, ist mit dem Wort *oder*. Das dazu gehörige Symbol ist: $\vee$
In unserem Alltagssprachgebrauch kann *oder* zwei verschiedene Bedeutungen haben. Es wird sowohl ein- als auch ausschließend verwendet.

Beispiel 4. Disjunktion (Oder-Verknüpfung)
„Es werden Bewerber mit Spanisch- oder Französischkenntnissen gesucht“. Hier ist das *einschließende oder* (d.h. *und/oder*) gemeint. Es werden also Personen, die entweder Spanisch oder Französisch oder beides sprechen, gesucht. Im Satz „Anna ist 14 oder 15 Jahre alt“ ist das *oder* ausschließend. Nur einer der Fälle kann gelten.
In der mathematischen Logik wird das Wort *oder* immer *einschließend* verwendet, also im Sinne eines *und/oder*:

A	**B**	**A ∨ B**
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Ein weiterer Unterschied zu alltäglichen Aussagen ist, dass in der mathematischen Logik mit den Worten *und* bzw. *oder* keine zeitlichen oder kausalen Zusammenhänge berücksichtigt werden. In der Alltagssprache hingegen unterscheidet man zwischen folgenden Aussagen sehr wohl: „Fritz bekam Bauchschmerzen und nahm Medizin“ und „Fritz nahm Medizin und bekam Bauchschmerzen“.
In der Aussagenlogik gibt es zwischen diesen beiden Aussagen keinerlei Unterschied. Es gilt: $A \wedge B = B \wedge A$.

Folgerungen sind eine weitere Möglichkeit, zwei Aussagen miteinander zu verknüpfen: *Wenn* A wahr ist,*dann* gilt auch B. Eine solche *Wenn-dann-Verknüpfung* wird durch einen Doppelpfeil nach rechts dargestellt: $\Rightarrow$

Folgendes scheint allerdings auf den ersten Blick ungewohnt und ist zu beachten:
Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.
Ist A von Anfang an falsch, dann ist die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr. Versuchen wir nun diese Definition durch ein Beispiel besser zu verstehen (siehe v.a. Fall 3 und 4):

A	**B**	**A ⇒ B**
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel 5. Implikation (Wenn-dann-Verknüpfung)
Wir untersuchen folgende Aussage: „Für alle natürlichen Zahlen m und n gilt: Wenn m gerade ist, dann ist auch das Produkt $m \cdot n$ gerade".
In Symbolen: Sei $m, n \in \mathbb{N}$: A: *m ist gerade*, B: *$m \cdot n$ ist gerade.*
Wir sollen untersuchen, dass für alle natürlichen Zahlen $A \Rightarrow B$ gilt.
Für n gibt es keine Einschränkungen, diese Zahl kann gerade oder ungerade sein. Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

1) m ist gerade und n kann gerade oder ungerade sein. Jede gerade Zahl kann man in der Form $m = 2p$ schreiben, wobei p eine natürliche Zahlen ist. Wir erhalten: $m \cdot n = 2p \cdot n = 2 \cdot (pn)$. Da pn wieder eine natürliche Zahl ist, ergibt das Doppelte davon sicher eine gerade Zahl. Sowohl Bedingung A als auch Folgerung B sind wahre Aussagen.
2) Nun betrachten wir den umgekehrten Fall, dass m ungerade und n gerade ist: Sei $m = 2p + 1$, $n = 2q$; $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist $m \cdot n = (2p + 1) \cdot 2q = 4pq + 2q = 2 \cdot (2pq + q)$. Der zweite Faktor ist eine natürliche Zahl, deshalb erhalten wir auch hier als Produkt eine gerade Zahl. Nun war die Bedingung A falsch, die Folgerung B hingegen weiterhin wahr.
3) Übrig bleibt nun noch der Fall, dass m und n beide ungerade sind:
Sei $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$. Dann ist
$m \cdot n = (2p + 1) \cdot (2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2 \cdot (2pq + p + q) + 1.$
Der Term in der Klammer $(2pq + p + q)$ stellt eine ganze Zahl dar. Durch den Summanden 1 erhalten wir ein ungerades Ergebnis. Hier sind sowohl Bedingung A als auch Folgerung B falsch.

Wenn A wahr war, dann war auch B wahr. Bei falschem A waren beide Fälle möglich.
Für $A \Rightarrow B$ haben wir in allen Fällen *wahr* erhalten – die Aussage ist richtig.
Aus Falschem folgt Beliebiges!

Vorsicht:
Implikationen $(A \Rightarrow B)$ dürfen nicht umgedreht werden!
Sei A die Aussage „Es regnet" und B „die Straße ist nass". $A \Rightarrow B$ ist *wahr*, aber $B \Rightarrow A$ ist *nicht wahr*, denn „Wenn die Straße nass ist", muss es nicht unbedingt regnen. Die Straße konnte auch aus anderen Gründen nass sein.

Als letzten Junktor sehen wir uns nun noch die *Genau-dann-wenn-Verknüpfung* (Äquivalenz) an. Diese wird durch einen Äquivalenz-Doppelpfeil zwischen zwei Aussagen dargestellt: $\Leftrightarrow$ Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder beide falsch sind:

A	B	A⇔B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Hier noch eine zusammenfassende Übersicht über die zuvor genannten Junktoren:

nicht (Negation)	¬
und (Konjunktion)	∧
oder (Disjunktion)	∨
wenn – dann (Implikation)	⇒
genau dann, wenn (Äquivalenz)	⇔

Um komplexere Aussagen zu erhalten, können auch mehrere Aussagen und Junktoren miteinander kombiniert werden.

3 Logicals

Als *Logicals* werden oft Denkspiele bezeichnet, bei denen es darum geht, Beziehungen zwischen Gruppen mit jeweils gleich vielen Elementen herzustellen.

Beispiel 6. In Kickstadt gibt es drei Fußballvereine – den 1. FC Kick, den SV Kick und die Kickers. Jeder hat ein eigenes Stadion. Es gibt das Zentralstadion, das Parkstadion und das Sportstadion. Eine Mannschaft spielt in blauen Trikots, eine in roten und eine in weißen. Außerdem haben die Vereine unterschiedliche Mitgliederzahlen: 300, 400 und 500.

Folgende Hinweise sind gegeben:

1. Der 1. FC Kick, der in blauen Trikots spielt, hat weniger Mitglieder als der Verein, der im Zentralstadion spielt.
2. Der SV Kick hat 400 Mitglieder.
3. Die Kickers spielen nicht mit roten Trikots. Ihre Mitgliederzahl und die des Vereins, der im Parkstadion spielt, beträgt nicht 300.

Wir erfahren zum Beispiel die Namen von drei Fußballvereinen, die jeweils andere Trikotfarben, andere Fußballstadien und unterschiedliche Mitgliederzahlen haben. Es wird eine Reihe von direkten und indirekten Hinweisen gegeben. Die Aufgabe ist nun, dem jeweiligen Fußballverein seine Mitgliederzahl, seine Trikotfarbe und sein Fußballstadion zuzuordnen. Am Ende einer solchen Aufgabe steht zur Kontrolle häufig eine Frage wie: „Zu welchem Fußballverein gehört das Sportstadion?“

Eine solche Aufgabe stellt sich mathematisch gesehen folgendermaßen dar:
Es ist eine bestimmte Anzahl von Mengen mit jeweils n Elementen (hier $n = 3$) vorgegeben und nach bestimmten Bedingungen soll man nun eine Zuordnung dieser Mengen finden. In unserem Beispiel sind die Mengen M1 - M4 die Fußballvereine, Trikots, Fußballstadien und die Mitgliederzahlen. Bei den Zuordnungen ist natürlich zu berücksichtigen, dass z.B. nicht zwei verschiedenen Fußballvereinen dieselbe Trikotfarbe zugeordnet wird.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Lösung eines derartigen Rätsels ist ein tabellenartiges Schema, in das wir die einzelnen Ergebnisse eintragen. Die Hinweise geben meist eine Beziehung zwischen einem Element einer Menge und einem Element einer anderen Menge an. In unserem Beispiel gibt es vier Gruppen.

	Zentral	**Park**	**Sport**	**blau**	**rot**	**weiß**	**300**	**400**	**500**
1. FC Kick									
SV Kick									
Kickers									
300									
400									
500									
blau									
rot									
weiß									

Die Kästchen werden nun folgendermaßen ausgefüllt: Gilt eine bestimmte Zuordnung, wird ein Pluszeichen eingetragen, gilt die Zuordnung nicht, wird ein Minuszeichen eingetragen. Am Schluss muss in jedem der dick umrandeten 3x3-Felder pro Zeile und pro Spalte genau ein Pluszeichen stehen. Das Rätsel ist gelöst, wenn die oberen drei 3x3-Felder komplett gefüllt sind.

Beginnen wir nun die Kästchen zu füllen:
Die direkten Hinweise (siehe oben 1-3) können wir direkt in die Tabelle eintragen. Manche Informationen kann man nur indirekt herauslesen, z.B. besagt Satz 1, dass der 1. FC Kick nicht im Zentralstadion spielt, dass er nicht der Verein mit den 500 Mitgliedern ist und dass der Verein, der im Zentralstadion spielt, nicht der mit den 300 Mitgliedern sein kann.

	Zentral	**Park**	**Sport**	**blau**	**rot**	**weiß**	**300**	**400**	**500**
1. FC Kick	–			+					–
SV Kick								+	
Kickers		–			–		–		
300	–	–							
400									
500									
blau									
rot									
weiß									

Im nächsten Schritt betrachten wir nur die einzelnen 3x3-Tabellen.
Wir füllen in allen 3x3-Tabellen die Zeilen und Spalten, in denen bereits ein Pluszeichen steht, komplett mit Minuszeichen auf. In Zeilen oder Spalten, in denen bereits zwei Minuszeichen stehen, kann das letzte nur ein Pluszeichen sein:

	Zentral	Park	Sport	blau	rot	weiß	300	400	500
1. FC Kick	–			+	–	–	+	–	–
SV Kick				–	+	–	–	+	–
Kickers		–		–	–	+	–	–	+
300	–	–	+						
400									
500									
blau									
rot									
weiß									

Nun sind schon alle Zuordnungen der Fußballvereine zu den jeweiligen Mitgliederzahlen und zu den Trikotfarben klar. Es fehlen nur noch die Stadien. Hierfür sehen wir uns die Kästchen in der Mitte an. Wir kennen bereits die Zuordnung „Sportstadion $\leftrightarrow$ 300 Mitglieder“. Da wir aus der obersten Zeile wissen, dass der 1. FC Kick der Verein mit den 300 Mitgliedern ist, können wir folgern, dass der 1. FC Kick dem Sportstadion zugeordnet werden muss. Mit dieser Information füllt sich nun das ganze Diagramm:

	Zentral	Park	Sport	blau	rot	weiß	300	400	500
1. FC Kick	–	–	+	+	–	–	+	–	–
SV Kick	–	+	–	–	+	–	–	+	–
Kickers	+	–	–	–	–	+	–	–	+
300	–	–	+						
400									
500									
blau									
rot									
weiß									

Das Ausfüllen der unteren Felder ist lediglich eine Fleißaufgabe, da wir das Rätsel bereits mit dem Ausfüllen aller obigen Felder gelöst haben.

Die in diesem Beispiel verwendete Tabelle ist *eine* Mglichkeit, an solche Aufgaben heranzugehen. Manchmal bieten sich auch andere Tabellen an, um Logicals mit vielen vorgegebenen Merkmalen zu lösen.

Bei Logicals sind nicht immer nur eindeutige Informationen gegeben, sondern sie stellen oft Beziehungen zwischen den Gruppen auf, die man nicht immer offensichtlich ins Diagramm eintragen kann, sondern im Kopf behalten oder sich separat noch einmal ausdrücklich notieren muss.

Aber genug Theorie – nun seid ihr an der Reihe!

4 Aufgaben

Aufgabe 1 (Aussagen I*).

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen im Sinne der Logik?
1) Sieben ist eine ungerade Zahl.
2) Ich bin Lehrer für das Fach Mathematik.
3) Die Zahl 29 ist eine Primzahl.
4) Die Hauptstadt Deutschlands ist Berlin.
5) Das Jahr 2014 ist kein Schaltjahr.
6) Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: $(a \cdot b) \cdot c = ac \cdot bc$.

b) Gib die Negation folgender Aussagen an:
1) Schwäne sind nicht schwarz.
2) $0,5 < x < 5 \; ; \quad x \in \mathbb{Q}$

c) Löse die Knobelaufgabe vom Anfang.

Aufgabe 2 (Aussagen II*).

Wir sehen uns folgende Aussagen an:
1) Francis Bacon hat alle Theaterstücke von Shakespeare geschrieben.
2) Es gibt ein Theaterstück von Shakespeare, das Francis Bacon geschrieben hat, aber Francis Bacon hat nicht alle Theaterstücke von Shakespeare geschrieben.
3) Es gibt ein Theaterstück von Shakespeare, das nicht von Francis Bacon geschrieben wurde.

Welche der obigen Aussagen richtig sind und welche nicht, wissen wir nicht. Unter den obigen Aussagen gibt es jedoch zwei solche, die beide gleichzeitig wahr und beide gleichzeitig auch nicht wahr sein können. Ebenso gibt es unter ihnen auch zwei Aussagen, die gleichzeitig nicht wahr sein können, aber nicht gleichzeitig wahr sein können.
Um welche Aussagen handelt es sich? Begründe!

Aufgabe 3 (Perückenfarbe*).

a) In einem Faschingsumzug stehen drei Personen hintereinander, die von jemand anderem jeweils eine farbige Perücke aufgesetzt bekommen, deren Farbe sie selbst nicht sehen. Alle drei wissen allerdings, dass es eine Auswahl von zwei blauen und drei roten Perücken gibt. Die hinterste Person wird gefragt, ob sie ihre Perückenfarbe kenne. Sie sagt: „Nein“. Auch die mittlere Person verneint, als sie die gleiche Frage gestellt bekommt. Als letztes wird die vorderste Person gefragt. Was antwortet sie?

Warum?
b) „Treten Sie näher“, sagt der Faschingsclown zu den drei Personen. „Sehen Sie, ich habe hier wieder die fünf Perücken: drei rote und zwei blaue. Ich werde jedem von Ihnen eine dieser Perücken aufsetzen, während Sie die Augen schließen. Wenn Sie die Augen alle gleichzeitig wieder öffnen, kann jeder die Perückenfarbe der beiden anderen sehen, aber weder seine eigene noch die nicht verwendeten Perücken. Der erste von Ihnen drei, der durch logische Überlegung die Farbe seiner Perücke bestimmen kann, gewinnt einen Preis.“ Nach einer Weile, ohne ein Wort miteinander gewechselt zu haben, nennen sie alle gleichzeitig ihre Perückenfarbe.
Wie sind die Perückenfarben verteilt? Erkläre!

Aufgabe 4 (Logical**).

Fünf Häuser stehen in einer Reihe nebeneinander und haben je eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität. Jeder Hausbewohner bevorzugt ein bestimmtes Getränk, hat eine bestimmte Lieblingsspeise und hält ein bestimmtes Haustier. Keine der fünf Personen trinkt das gleiche Getränk, hat die gleiche Lieblingsspeise oder hält das gleiche Tier wie einer seiner Nachbarn.
Hinweise:
1) Der Deutsche lebt im roten Haus.
2) Der Schwede hält ein Pferd.
3) Der Däne trinkt gern Tee.
4) Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
5) Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Bier.
6) Die Person, die gerne Spaghetti isst, hält einen Vogel.
7) Der Mann, der im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
8) Der Besitzer des gelben Hauses isst gerne Fisch.
9) Der Norweger wohnt im ersten Haus.
10) Die Person, die gerne Salat isst, wohnt neben dem, der eine Katze hält.
11) Der Mann, der einen Hund hält, wohnt neben dem, der gerne Fisch isst.
12) Derjenige, der gerne Pizza isst, trinkt gerne Kaffee.
13) Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14) Der Brite isst gerne Kartoffeln.
15) Die Person, die gerne Salat isst, hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.
Wer besitzt einen Hamster als Haustier? Zeige mithilfe einer geeigneten Tabelle und den Zwischenschritten, wie du auf deine Lösung gekommen bist!

Aufgabe 5 (Mit Logik auf der Spur**).

Nach einem Einbruch in eine Bankfiliale wurden die drei Verdächtigen Alex, Bob und Charly einzeln verhört, wobei sie keine Gelegenheit hatten, ihre Aussagen untereinander abzusprechen. Da es keine Zeugen gibt und keine Fingerabdrücke gefunden werden konnten, ist nicht klar, ob die Tat von einer einzelnen Person, von zwei oder

sogar von allen drei Personen begangen wurde. Mindestens einer der drei einschlägig vorbestraften Verdächtigen war beim Einbruch dabei. Alle drei wurden einzeln in den Vernehmungsraum gebeten.
Alex wurde als Erster vernommen und sagte aus, dass Einbrüche für ihn längst zur Vergangenheit gehörten, Bob und Charly jedoch in diesem Gewerbe noch ihre Zukunft sahen. Bob erwähnte, dass er und Charly nichts damit zu tun hätten, Alex jedoch Pläne hatte, in die Bankfiliale einzubrechen. Und Charly beteuerte wiederum, dass Alex und Bob detaillierte Pläne für den Einbruch hatten, er sich selbst jedoch völlig heraus gehalten hätte. Drei Aussagen – drei unterschiedliche Versionen der Geschichte.
Kommissar Fuchs sah sich das Vernehmungsprotokoll an, dachte ein wenig nach, trug die Aussagen der drei in ein Schema ein und sagte schließlich: „Ich habs! Wenn wir generell davon ausgehen, dass jeder Schuldige lügt und jeder Unschuldige uns die Wahrheit sagt, dann können wir Bob gleich hier behalten.“
a) Zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle, wie Bob entlarvt werden konnte.

Nun ist aber noch nicht klar, ob Bob den Einbruch alleine beging oder ob er einen Komplizen hatte. Als Bob mit obigen Überlegungen überführt wurde und ihm klar wurde, dass die anderen beiden ihn ganz schön in die Bredouille gebracht hatten, gibt er seinen Widerstand auf und sagt: „Alleine habe ich den Einbruch aber nicht begangen. Charly und Alex haben im Verhör beide nicht die Wahrheit gesagt.“
b) Wer war noch an dem Einbruch beteiligt?

Aufgabe 6 (Lügner I***).

Die Drillingsbrüder Anton, Bruno und Carl lassen sich äußerlich überhaupt nicht unterscheiden, haben aber unterschiedliche Eigenheiten. Anton und Bruno lügen immer, wohingegen Carl immer die Wahrheit sagt. Bei einem Spaziergang trifft der Onkel einen der Brüder und möchte wissen, ob es sich um Anton handelt. Der Onkel darf nur eine einzige Frage stellen, die nur mit Ja oder Nein zu beantworten ist. Die Frage darf nicht mehr als drei Wörter haben.
Wie lautet die Frage?
Erkläre!

Weiterführende Links

https://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/gebiete/logik/logik.html
http://www.wissenschaft-online.de/sixcms/media.php/370/Leseprobe.1073250.pdf