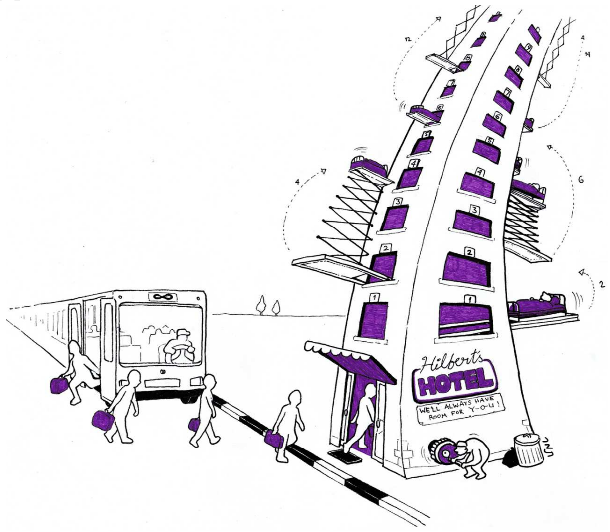
Schülerzirkel Mathematik

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Unendliche Mengen

Immer eins mehr als du

1 Was ist unendlich?

Michi sagt zu Anna: „Wenn ich pro Sekunde eine natürliche Zahl aufzählen kann, kann ich in 2000 Sekunden alle natürlichen Zahlen aufsagen.“ „Das geht doch gar nicht,“ entgegnet Anna, „wenn du bei 0 anfängst, bist du bei der 2000sten Sekunde genau bei der Zahl 1999, also lässt du alle Zahlen ab 2000 aus“. „Doch, es geht,“ gibt Michi an, „du musst halt in einer anderen Reihenfolge zählen. “

Knobelaufgabe 1. In welcher Reihenfolge muss Michi zählen?

Wir wollen uns diesmal mit dem Thema *Unendlichkeit* befassen. Im Alltag bezeichnen wir meist etwas mit *unendlich*, wenn es für uns nicht greifbar ist. Im Kindergarten nannten wir unendlich, wenn es darum ging sich die größte Zahl auszudenken. Manch ein Kirchgänger setzt Gott mit der Unendlichkeit gleich, weil dieser für Menschen nicht begreifbar ist. Unendlich taucht auch in anderen Kontexten auf, zum Beispiel wenn es heißt, das Universum sei unendlich ausgedehnt.

Wir wollen hier unendlich als Eigenschaft von Mengen ansehen und zwar die Eigenschaft, nicht aus endlich vielen Elementen zu bestehen. Obwohl diese Definition sehr leicht zu verstehen ist, werden wir sehen, dass wir unserer Intuition im Umgang mit dieser Definition nicht vertrauen können. Beim Wettstreit, wer die größere Zahl kennt, sagen Kinder gerne „Immer

---

Thema vom 10.1.2014. Einsenden der Lösungen bis 14.3.2014.

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg

http://www.mathematik.uni-r.de/szm, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Quelle des Bildes: http://chips-illustrated.blogspot.de/2012/05/hilberts-hotel.html

eins mehr als du! Unendlich plus eins ist größer als unendlich!“ Wir werden jedoch weiter unten sehen, dass eher $\infty + 1 = \infty$ richtig ist.

Es soll hier nicht vorausgesetzt sein, dass jeder mit dem abstrakten Begriff *Menge* vertraut ist. Da es außerdem nicht unser Ziel ist, abstrakte Mengenlehre zu betreiben, beschränken wir uns ab jetzt auf die Betrachtung von Teilmengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (Ausnahme: Aufgabe 6). Beispiele solcher Teilmengen sind

- Die Menge, die aus den Zahlen $0, -\frac{1}{2}, 29991$ besteht. Wir schreiben für diese Menge $\{0, -\frac{1}{2}, 29991\}$
- Die Menge aller negativen rationalen Zahlen
- Die Menge $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ aller positiven geraden ganzen Zahlen

Eine Menge heißt *endlich*, wenn es eine natürlich Zahl n gibt, sodass wir die Elemente dieser Menge mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ durchnummerieren können. Beispielsweise ist die Menge $\{0, -\frac{1}{2}, 29991\}$ endlich, denn wir geben 29991 die Nummer 1, wir geben $-\frac{1}{2}$ die Nummer 2, und 0 die Nummer 3 (in diesem Fall ist $n = 3$). Beachte, dass wir die Elemente auch in einer anderen Reihenfolge aufzählen könnten. Auch die Menge $\{3, 4, 5, \ldots, 77, 78\}$ aller natürlichen Zahlen von 3 bis 78 ist endlich, eine mögliche Nummerierung wäre: Die Zahl 3 hat die Nummer 1, die Zahl 4 hat die Nummer 2,..., die Zahl 78 hat die Nummer 76.

Wir nennen eine Menge *unendlich*, wenn sie nicht endlich ist. Wir können gleich ein paar Beispiele angeben.

Beispiel 1. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ist unendlich.

Beweis. Wir zeigen dies mit einem indirekten Beweis[1]. Angenommen die natürlichen Zahlen wären nicht unendlich, also endlich. Dann gäbe es ein n, so dass wir alle natürlichen Zahlen durch x_1, x_2,...,x_n aufzählen könnten. Es ist aber jede dieser Zahlen echt kleiner als die natürliche Zahl

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 1.$$

Also ist diese natürliche Zahl nicht in unserer Liste enthalten, was der Annahme widerspricht. Deswegen ist $\mathbb{N}$ nicht endlich. ◻

Beispiel 2. Jede Menge, die eine unendliche Teilmenge hat, ist selbst unendlich.

Beweis. Die Menge M habe die unendliche Teilmenge T. Zu zeigen ist, dass M unendlich ist. Angenommen M wäre endlich, so wäre T als Teilmenge einer endlichen Menge M ebenfalls endlich. Dies steht im Widerspruch dazu, dass T unendlich ist. Also kann M nicht endlich sein. ◻

Mit diesen beiden Beispielen können wir nun viele andere unendliche Mengen finden, zum Beispiel ist die Menge aller nicht-negativen rationalen Zahlen unendlich, weil sie die unendliche Menge der natürlichen Zahlen als Teilmenge enthält. Wenn du willst, kannst du nun schon versuchen, die Aufgaben 1 und 3 zu lösen (letzte und vorletzte Seite).

[1] siehe Hilfsblatt *Wie beweise ich etwas?*, einen Link findest du auf der letzten Seite

2 Beschränkte Mengen

Eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine positive ganze Zahl m gibt, sodass Folgendes gilt: Alle Zahlen der Teilmenge liegen zwischen $-m$ und m. In anderen Worten: Für jedes Element t der Teilmenge gilt $-m \leq t \leq m$.

Umgangssprachlich wird *unendlich* gerne mit *nicht beschränkt* gleichgesetzt. Dieser Intuition sollte man allerdings nicht trauen, denn betrachte zum Beispiel die unendliche Menge (siehe Aufgabe 3)

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\},$$

also die Menge aller Brüche mit 1 im Zähler und einer positiven natürlichen Zahl im Nenner. Sie ist beschränkt: Schon für die natürliche Zahl $m = 1$ ist jeder Bruch dieser Menge größer als $-m$ und kleiner als oder gleich m.

Für Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist diese Intuition aber richtig (siehe Aufgabe 4).

3 Maximum unendlicher Mengen

In jeder endlichen Teilmenge T von $\mathbb{Q}$ finden wir das größte Element, das heißt ein Element t dieser Menge T, das größer als alle anderen Elemente von T ist. Man nennt das größte Element auch *Maximum*. Zum Beispiel ist 78 das größte Element der Menge $\{3, -1, \frac{1}{4}, 78, 70, 31\}$ und -2 ist das größte Element der Menge

$$\{-340, -338, -336, \dots, -6, -4, -2\}.$$

Was ist das Maximum der Menge $]-1, 1[$ der rationalen Zahlen q mit $-1 < q < 1$? Was ist das größte Element von $\mathbb{N}$?[2] In beiden Fällen lautet die Antwort: Es gibt kein Maximum.

Beispiel 3. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $]-1, 1[$ besitzen jeweils kein Maximum.

Beweis. a) Angenommen n wäre das größte Element von $\mathbb{N}$, dann wäre jede andere Zahl kleiner als n. Dies trifft aber nicht auf $n + 1$ zu (beachte: ∞ ist <u>keine</u> natürliche Zahl).

b) Angenommen q wäre das Maximum von $]-1, 1[$. Es gilt $q < 1$. Wir zeigen nun, dass es eine rationale Zahl x gibt mit $q < x < 1$. Zum Beispiel gilt dies für die rationale Zahl $x = q + \frac{1-q}{2}$, denn man hat

$$q < q + \frac{1-q}{2} < q + (1-q) = 1.$$

Also haben wir mit x ein Element von $]-1, 1[$ gefunden, das echt größer als q ist. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass q das Maximum ist. ▢

[2] die Zahl, die wir im Kindergarten immer gesucht haben

4 Hilberts Hotel

Stell dir ein Hotel vor, das unendlich viele Zimmer hat und zwar mit den positiven natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ durchnummeriert[3]. Du bist gerade auf der Durchreise und möchtest ein Zimmer haben. Jedoch wird dir mitgeteilt, dass schon alle Zimmer belegt sind. Weit und breit gibt es kein weiteres Hotel. Also was tun?

Der Hoteldirektor meint, er könne für dich doch noch ein Zimmer frei machen, ohne dass ein anderer Gast das Hotel verlassen muss. Jeder Hotelgast wird dazu angewiesen, eine Zimmernummer weiterzuziehen, das heißt: Der Gast aus Zimmer 1 zieht ins Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 zieht ins Zimmer 3, der Gast aus Zimmer 3 zieht ins Zimmer 4, und so weiter.

Danach hat jeder bisherige Hotelgast ein Zimmer und du kannst in das nun freie Zimmer Nummer 1 ziehen. Unendlich viele Gäste plus ein Gast passen also immer noch in unendlich viele Zimmer. Man könnte diese Beobachtung mit der Gleichung $\infty + 1 = \infty$ beschreiben.

Stellt dir nun einen Bus vor, der unendlich viele Sitze hat und zwar durchnummeriert mit $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ (wie die Zimmer von Hilberts Hotel). Auf jedem Sitz sitze ein Fahrgast. Der Bus kommt abends zu Hilberts Hotel und alle Fahrgäste hätten gerne ein Zimmer für die Übernachtung. Doch leider ist wieder kein Zimmer frei. Ist es jetzt möglich für alle Fahrgäste ein Zimmer frei zu machen? „Kein Problem," lacht der Hoteldirektor „es muss lediglich jeder Hotelgast in die doppelte Zimmernummer weiterziehen". Das heißt der Gast aus Zimmer 1 zieht ins Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 zieht ins Zimmer mit 4, der Gast aus Zimmer mit 3 zieht ins Zimmer mit 6, und so weiter[4]. Dann sind die Zimmer mit den ungeraden Nummern 1,3,5,7,9,... frei und alle Fahrgäste haben dort Platz: Der Fahrgast vom Sitz 1 bekommt Zimmer 1, der Fahrgast vom Sitz 2 bekommt Zimmer 3, der Fahrgast vom Sitz 3 bekommt Zimmer 5, der Fahrgast vom Sitz 4 bekommt Zimmer 7, und so weiter. Wir können diese verblüffende Entdeckung auch so beschreiben: $\infty + \infty = \infty$.

In Hilberts Hotel ist sogar Platz, wenn statt eines Busses unendlich viele Busse (für jede natürliche Zahl ein Bus) kommen. Die Erklärung dafür kannst du im Internet nachlesen (auf der letzten Seite ist ein Link).

5 Aufgaben

Jede Lösung sollte ausreichend begründet werden. Beachte: Manche Aufgaben lassen sich mit einem indirekten Beweis lösen, siehe Hilfsblatt *Wie beweise ich etwas?* (einen Link findest du auf der letzten Seite)

Aufgabe 1 (*). a) Löse die Knobelaufgabe von der ersten Seite.

b) Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ unendlich ist.

[3] Dieses heißt *Hilberts Hotel*, benannt nach dem berühmten Mathematiker David Hilbert. Einige von euch, die am Workshop „Mathematisches Kaleidoskop" im Mai 2013 teilgenommen haben, kennen Hilberts Hotel bereits.

[4] Auf der ersten Seite dieses Themenblattes siehst du eine Zeichnung von Hilberts Hotel, in der der Umzug der Hotel-Gäste mit einer Kurbel betriebenen Mechanik umgesetzt wird.

Aufgabe 2 (*). Finde eine unendliche Menge, die ein Maximum besitzt.

Aufgabe 3 (**). Zeige, dass die Menge $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ unendlich ist.

Aufgabe 4 (**). Sei T irgendeine Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (zum Beispiel die Menge $T = \{4, 5, 6, \ldots, 201\}$ oder die Menge $T = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ der geraden positiven natürlichen Zahlen). Beweise:

a) Ist T unendlich, so ist T nicht beschränkt.

b) Ist T nicht beschränkt, so ist T unendlich.

Aufgabe 5 (***). Zwei Busse mit jeweils unendlich vielen Fahrgästen, die auf Sitzen mit den Nummern 1,2,3,4,... sitzen, machen nach einer langen Fahrt bei Hilberts Hotel halt. Jeder Fahrgast hätte gerne ein Zimmer für die Übernachtung. Leider sind wieder alle Zimmer belegt. Gibt es eine Möglichkeit trotzdem im Hotel genug freie Zimmer zu finden?

Zum Abschluss möchten wir einsehen, dass unendliche Mengen unterschiedlich „groß“ sein können. Eine unendliche Menge (nun nicht mehr unbedingt eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$) heißt *abzählbar unendlich*, wenn eine Nummerierung ihrer Elemente mit 0,1,2,3,4,... existiert. Ansonsten heißt die Menge *überabzählbar*. Folgende Aufgabe zeigt, dass die abzählbar unendlichen Mengen in gewisser Weise die kleinsten unendlichen Mengen sind.

Aufgabe 6 (∞*). a) Zeige, dass jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge hat.

b) Beweise, dass es überabzählbare Mengen gibt. Zeige dazu, dass sich die Teilmengen von $\mathbb{N}$ nicht mit 0,1,2,3,4,... durchnummerieren lassen.

Weiterführende Links

Tipps zum Bearbeiten einer Aufgabe/Wie beweise ich etwas?/Aktuelle Aufgaben:
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Aufgaben
Kardinalzahlen (die Größe einer unendlichen Menge):
http://de.wikipedia.org/wiki/Kardinalzahl_%28Mathematik%29
http://de.wikipedia.org/wiki/Abz%C3%A4hlbare_Menge
Hilberts Hotel:
http://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Hotel
http://www.youtube.com/watch?v=XTsaZRKx9UI
Über den Mathematiker David Hilbert:
http://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
überabzählbare Mengen:
http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cberabz%C3%A4hlbare_Menge
http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/stichpunkte/abzaehlbar.html
Folgen und Reihen:
http://de.wikipedia.org/wiki/Folge_%28Mathematik%29
http://de.wikipedia.org/wiki/Reihe_%28Mathematik%29