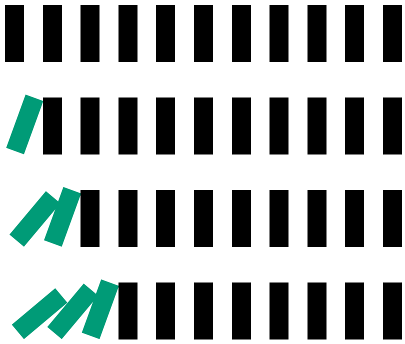
Schülerzirkel Mathematik

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Induktion

$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$



Wir beschäftigen uns im folgenden mit einem wichtigen Aspekt der natürlichen Zahlen, dem sogenannten Prinzip der vollständigen Induktion.

Knobelaufgabe 1 (Parkplatzpuzzle). Der $2^{2013} \times 2^{2013}$-Frachtraum eines Raumfrachters soll mit kleinen L-Tromino-Raumgleitern gefüllt werden, ohne dass sich diese überlappen. Auf einem der Felder des Frachtraums steht jedoch ein Container. Kann der restliche Frachtraum immer mit Raumgleitern gefüllt werden, unabhängig davon, auf welchem Feld der Container steht?

Wie kann man ein solches Problem angehen? Man könnte natürlich alle möglichen Konfigurationen (z.B. mit Hilfe eines Computers) durchprobieren. Aber selbst wenn man es auf diese Weise tatsächlich schafft, eine Antwort auf die obige Frage zu erhalten, ist diese Lösung unbefriedigend, da sie sich nicht ohne weiteres auf andere Frachtraumgrößen verallgemeinern lässt.

Im folgenden werden wir das Induktionsprinzip kennenlernen, das helfen kann, Aussagen über die natürlichen Zahlen zu beweisen. Insbesondere werden wir so auch eine elegante Antwort auf das verallgemeinerte Parkplatzpuzzle erhalten.

Thema vom 15. März 2013. Einsenden der Lösungen bis 9. Mai 2013.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

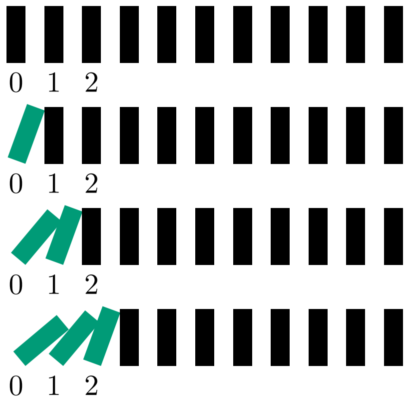


Abbildung 1: Jeder kippende Dominostein stößt den nächsten an ...

1 Induktion

1.1 Das Induktionsprinzip

Den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist das Prinzip der vollständigen Induktion zueigen:

Prinzip der vollständigen Induktion. Sei M eine Menge natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllt:

(0) Induktionsanfang. Es ist $0 \in M$.

(+1) Induktionsschritt. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Ist n in M, so ist auch $n+1$ in M.

Dann ist $M = \mathbb{N}$, d.h. M enthält alle natürlichen Zahlen.

Das Induktionsprinzip besagt, dass jede natürliche Zahl, ausgehend von 0 durch hinreichend häufige Anwendung von „+1“ erreicht werden kann. Wir können uns das Induktionsprinzip auch wie folgt vorstellen: Wir stellen auf der Zahlengeraden an jeder natürlichen Zahl einen Dominostein auf. Wenn wir den Stein bei 0 anstoßen und zum Kippen bringen (Induktionsanfang) und wir für jeden Stein wissen, dass er, wenn er kippt, auch seinen rechten Nachbarn anstößt und zum Kippen bringt (Induktionsschritt), dann werden alle Dominosteine umkippen (Abbildung 1).

Das Induktionsprinzip hängt mit weiteren wichtigen Prinzipien zusammen, nämlich mit dem Rekursionsprinzip und dem Wohlordnungsprinzip (s. Anhang).

1.2 Ein Beispiel

Wir zeigen nun an einem Beispiel, wie uns das Induktionsprinzip helfen kann, Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen:

Beispiel 2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Lösung. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right\}.$$

Induktionsanfang. Es ist 0 in M, denn

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}.$$

Induktionsschritt. Sei n in M (dies ist die sogenannte Induktionsvoraussetzung). Dann ist auch $n+1$ in M, denn: Es gilt

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n+1) = (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n+1).$$

Da $n \in M$ ist, können wir den Term in der ersten Klammer auf der rechten Seite durch $n \cdot (n+1)/2$ ersetzen. Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist auch $n+1$ in M.

Nach dem Induktionsprinzip ist somit $M = \mathbb{N}$. Nach Definition von M bedeutet dies aber gerade, dass $0+1+2+\cdots+n = n \cdot (n+1)/2$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, wie behauptet. ◻

Zumeist formuliert man einen solchen Induktionsbeweis etwas knapper:

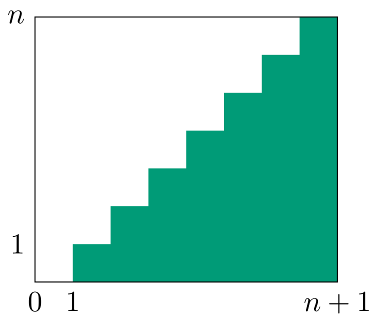


Abbildung 2: Ein graphisches Argument für Beispiel 2

Lösung. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang. Die Behauptung gilt für die natürliche Zahl 0, denn

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung. Sei n eine natürliche Zahl, die die Behauptung erfüllt.

Induktionsschritt. Dann gilt die Behauptung auch für $n+1$, denn: Es gilt

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n+1) = (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung können wir den Term in der ersten Klammer auf der rechten Seite durch $n \cdot (n+1)/2$ ersetzen. Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Behauptung auch für $n+1$ erfüllt, was den Induktionsbeweis abschließt.

In diesem einfachen Beispiel gibt es auch ein schönes graphisches Argument:

Lösung. Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten dann die Situation in Abbildung 2. Stellen wir uns den grünen Bereich in vertikale Balken der Breite 1 aufgeteilt

0 + 1 + 1 + 1

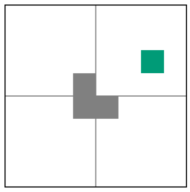


Abbildung 3: Der Induktionsschritt im Parkplatzpuzzle

vor, so sehen wir, dass der Flächeninhalt des grünen Bereichs die Summe $0+1+\cdots+n$ ist. Andererseits sieht man, indem man das Rechteck um $180°$ um seinen Mittelpunkt dreht, dass der weiße und der grüne Bereich denselben Flächeninhalt besitzen. Also ist der Flächeninhalt des grünen Bereichs halb so groß wie der Flächeninhalt $(n+1)\cdot n$ des gesamten Rechtecks. Somit folgt insgesamt

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Der Vorteil des Induktionsbeweises ist jedoch, dass sich mit dieser Methode ohne weiteres viele ähnliche Darstellungen von Summen etc. beweisen lassen (Aufgabe 1 und Aufgabe 3). Außerdem können wir mit dem Induktionsprinzip auch das zu Beginn gestellte Problem lösen:

Lösung. (von Knobelaufgabe 1). Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen n gilt: Ist ein Feld eines $2^n \times 2^n$-Frachtraums mit einem Container belegt, so lassen sich die restlichen Felder mit L-Trominos füllen.

Induktionsanfang. Entfernt man ein Feld aus einem $2^0 \times 2^0$-Frachtraum, so bleibt nichts übrig; dies kann man natürlich mit (null) L-Trominos füllen.

Induktionsvoraussetzung. Sei n eine natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h., dass wann immer ein Quadrat eines $2^n \times 2^n$-Frachtraums mit einem Container belegt ist, sich die restlichen Felder mit L-Trominos füllen lassen.

Induktionsschritt. Wir zeigen nun, dass die Behauptung dann auch für $n+1$ gilt: Sei also ein Feld eines $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Frachtraums mit einem Container belegt. Wir teilen den $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Frachtraum wie in Abbildung 3 in vier $2^n \times 2^n$-Bereiche auf. Ohne Einschränkung sei das von einem Container belegte Feld im oberen rechten Bereich (sonst drehen wir die ganze Situation entsprechend). Aus den verbleibenden drei Bereichen entfernen wir nun die drei inneren Felder wie in Abbildung 3.

Nach Induktionsvoraussetzung können wir jeden der vier Bereiche ohne die angegebenen Felder mit L-Trominos füllen. Die verbleibende Lücke (in der Abbildung grau) füllen wir mit einem weiteren L-Tromino, was die Induktion abschließt.

Insbesondere gilt die Behauptung auch für den Parameter 2013, was einer positiven Antwort aus dem ursprünglichen Parkplatzpuzzle entspricht.

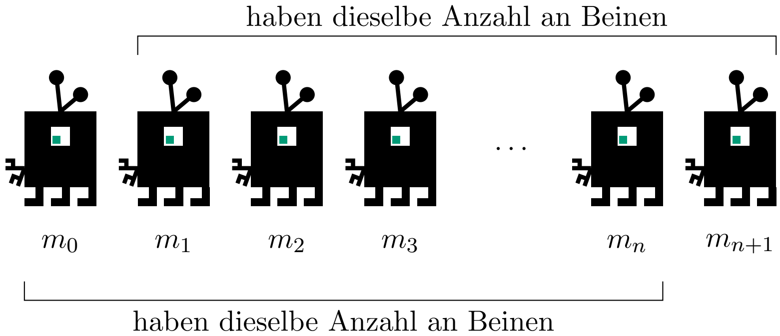


Abbildung 4: Alle Marsmännchen haben dieselbe Anzahl an Beinen

2 Aufgaben

Aufgabe 1 (Summen von ungeraden Zahlen*).

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n + 1) = (n + 1)^2$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt.

2. Kannst Du auch einen Beweis angeben, der auf dem Ergebnis aus Beispiel 2 beruht und keine weitere Induktion benötigt?

Aufgabe 2 (Überzeugende Induktion?*). Auf dem ICM (International Congress on Martians) trägt Professor Pirkheimer über seine neueste Entdeckung vor:

> *Behauptung: Alle Marsmännchen haben dieselbe Anzahl an Beinen.*
>
> *„Beweis“.* Wir beweisen die Behauptung, indem wir folgende Aussage durch vollständige Induktion zeigen: Ist n eine natürliche Zahl und A eine Menge von $n + 1$ Marsmännchen, so haben alle Marsmännchen in A dieselbe Anzahl an Beinen.
>
> *Induktionsanfang.* Ist A eine Menge, die nur ein Marsmännchen enthält, so haben alle Marsmännchen in A (also, nur dieses eine) natürlich alle dieselbe Anzahl an Beinen.
>
> *Induktionsvoraussetzung.* Sei n eine natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt.

Abbildung 5: Ein Fabionicc-Chip der Größe 8

Induktionsschritt. Wir zeigen nun, dass die Behauptung dann auch für $n+1$ gilt: Sei nun A eine Menge von $n+2$ Marsmännchen, etwa $m_0, \dots, m_{n+1}$. Dann enthalten die Mengen

$$A_1 := \{m_0, \dots, m_n\} \qquad \text{und} \qquad A_2 := \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$$

jeweils genau $n+1$ Marsmännchen. Nach der Induktionsvoraussetzung (angewendet auf A_1) haben also die Marsmännchen $m_0, \dots, m_n$ dieselbe Anzahl von Beinen; ebenso haben auch die Marsmännchen $m_1, \dots, m_{n+1}$ dieselbe Anzahl von Beinen (Induktionsvoraussetzung angewendet auf A_2). Da m_n sowohl in A_1 als auch in A_2 liegt, haben also $m_0, \dots, m_{n+1}$ alle dieselbe Anzahl von Beinen (Abbildung 4).

Damit ist der Beweis abgeschlossen. „□“

Was ist falsch an Pirkheimers Argument?

Aufgabe 3 (Summen von Quadraten**). Zu einer natürlichen Zahl n schreiben wir

$$Q_n := 6 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + n^2).$$

Bestimme die Werte $Q_0, \dots, Q_{10}$. Was fällt auf? Formuliere eine Vermutung für eine geschlossene Formel (wie in Beispiel 2) für die Werte Q_n und beweise sie durch vollständige Induktion.

Hinweis. Für alle natürlichen Zahlen n ist Q_n durch n teilbar. Welche weiteren Faktoren kannst Du entdecken?

Aufgabe 4 (Chips zählen**). Die Fabionicc-Chips der Größe n bestehen aus einer $n \times 2$-Platine, auf der n Bauteile vom Typ Domino angeordnet sind, wobei sich diese Dominos nicht überlappen (eine solche Konfiguration der Größe 8 ist in Abbildung 5 zu sehen). Sei C_n die Anzahl solcher Konfigurationen für Fabionicc-Chips der Größe n.

1. Wie lässt sich für $n > 1$ die Anzahl C_{n+1} aus C_n und C_{n-1} bestimmen?

2. Bestimme $C_0, \dots, C_{10}$.

0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

3. Fabionicc, der Erfinder dieser Chips behauptet, dass man die Anzahl der möglichen Konfigurationen ganz einfach an seinen Wurzel fünf Fingern abzählen könne, dass nämlich
$$C_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$
für alle natürlichen Zahlen n gelte. Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 5 (Verallgemeinertes Induktionsprinzip**). Zeige, dass man das verallgemeinerte Induktionsprinzip aus dem Induktionsprinzip ableiten kann:

> Verallgemeinertes Induktionsprinzip. Sei M eine Menge natürlicher Zahlen, die folgende Bedingung erfüllt:
>
> (0) Induktionsanfang. Es ist $0 \in M$.
>
> (+1) Induktionsschritt. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Sind $0, 1, \dots, n$ in M, so ist auch $n+1$ in M.
>
> Dann ist $M = \mathbb{N}$, d.h. M enthält alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe 6 (Last moon standing***). Zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ gibt es einen Planeten Sphejous$_n$. Um den Planeten Sphejous$_n$ kreisen auf einer gemeinsamen Kreisbahn n unbesiedelte Monde, die der Reihe nach $M_1, \dots, M_n$ heißen; insbesondere ist der nächste Mond nach M_n wieder M_1. Im ersten Jahr wird der Mond M_1 von Robotern besiedelt. Im nächsten Jahr wir der in der Kreisbahn übernächste noch verbliebene Mond von Robotern besiedelt. Im nächsten Jahr ...

Zur natürlichen Zahl n sei L_n die Nummer des Mondes von Sphejous$_n$, der als letztes von Robotern besiedelt wird.

1. Skizziere, was in den ersten fünf Jahren um den Planeten Sphejous$_6$ passiert. Welcher Mond wird als letztes besiedelt?
2. Wie hängen $L_{2 \cdot n}$ und L_n zusammen?
3. Wie hängen $L_{2 \cdot n+1}$ und L_n zusammen?
4. Kannst Du die Werte $L_1, L_2, \dots$ durch eine geschlossene Formel darstellen?

Weiterführende Links

Die Türme von Hanoi: http://www.cut-the-knot.org/recurrence/hanoi.shtml
Das Spiel Nim: http://en.wikipedia.org/wiki/Nim
Was sind eigentlich natürliche Zahlen? http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome

Anhang: Verwandte Konzepte: Rekursion und Wohlordnung

Eine wichtige Konsequenz des Induktionsprinzips ist, dass es erlaubt, auf $\mathbb{N}$ Funktionen rekursiv zu definieren (was z.B. beim Programmieren eine zentrale Rolle spielt): Die 0 wird auf den gegebenen Startwert abgebildet und zusätzlich wird erklärt wie man für jede natürliche Zahl n den Funktionswert bei $n+1$ durch den Funktionswert an der Stelle n (und n selbst) berechnet. Mathematisch exakt lässt sich dies wie folgt formulieren:

Rekursionsprinzip. Sei X eine Menge, sei $s \in X$ und sei $N \colon \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

0. Es ist $f(0) = s$.
1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n+1) = N\bigl(n, f(n)\bigr)$.

Wir zeigen nun an einem Beispiel wie das Rekursionsprinzip angewendet werden kann, um rekursiv Folgen zu definieren:

Beispiel 3. Wir betrachten die Menge $X := \mathbb{N}$ (also die natürlichen Zahlen selbst), als Startwert wählen wir $s := 0$ und für den Rekursionsschritt wählen wir die Funktion $N \colon \mathbb{N} \times X \longrightarrow X, (n, x) \longmapsto x + n + 1$. Dann erhalten wir mit dem Rekursionsprinzip die rekursiv definierte Funktion $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(0) = s = 0$ und

$$f(n+1) = N\bigl(n, f(n)\bigr) = f(n) + n + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir uns nun Schritt für Schritt durch die Rekursion hangeln, sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + n \\ &= f(n-2) + n - 1 + n \\ &\ \vdots \\ &= f(0) + 0 + 1 + \cdots + n \\ &= 0 + 1 + \cdots + n \end{aligned}$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt. Das Rekursionsprinzip erlaubt es also, eine mathematisch exakte Definition von „$+ \cdots +$“ in der Schreibweise „$0 + 1 + \cdots + n$“ zu geben.

Analog zum verallgemeinerten Induktionsprinzip gibt es auch ein verallgemeinertes Rekursionsprinzip, das es erlaubt, nicht nur auf den Funktionswert des direkten Vorgängers, sondern auf die Funktionswerte aller Vorgänger zuzugreifen.

Ein weiteres Konzept, das untrennbar mit dem Induktionsprinzip verbunden ist, ist das Wohlordnungsprinzip:

Wohlordnungsprinzip. Jede nicht-leere Menge von natürlichen Zahlen enthält ein kleinstes Element.

Man kann zeigen, dass das Wohlordnungsprinzip zum Induktionsprinzip äquivalent ist, d.h., dass man das Wohlordnungsprinzip aus dem Induktionsprinzip ableiten kann und umgekehrt.

Das Wohlordnungsprinzip gilt z.B. nicht für die ganzen Zahlen (die Menge aller ganzen Zahlen enthält *kein* minimales Element) und auch nicht für die Menge aller nicht-negativen rationalen Zahlen (die Menge aller positiven rationalen Zahlen enthält *kein* minimales Element, denn für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ ist die rationale Zahl $1/2 \cdot x$ positiv, aber $1/2 \cdot x < x$.