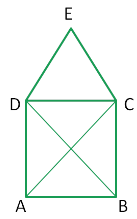
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Lösungen zum Thema Graphentheorie

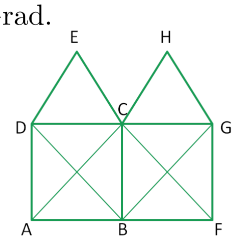


Lösung zu Aufgabe 1. (Haus vom Nikolaus)
a) Knobelaufgabe vom Anfang

zu a) Beginnt man bei Knoten A oder B, so kann man eine Lösung *in einem Zug* finden, z.B.: ABCDACEDB. Startet man bei einem der Knoten C, D oder E, so scheint dies nicht zu gelingen.

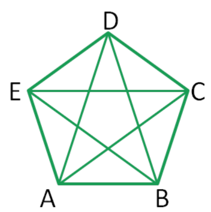
zu b) Das Zeichnen des *Haus vom Nikolaus* entspricht einem Euler-Weg. Die inneren Knoten (d.h. die Knoten, die weder Start- noch Endknoten sind) haben geraden Grad, da man jedes Mal, wenn man einen solchen Knoten erreicht, ihn über eine andere Kante auch wieder verlassen muss. A und B haben ungeraden Grad und können daher keine inneren Knoten eines Euler-Wegs sein. Also kann man höchstens dann das Haus vom Nikolaus in einem Zug zeichnen, wenn man bei A oder B beginnt, denn bei jedem anderen Startpunkt wäre A oder B ein innerer Knoten.

zu c) Einen Euler-Weg, bei dem der Anfangs- und Endpunkt gleich ist, nennt man Euler-Kreis. Bei einem Euler-Kreis müssen jedoch alle Knoten einen geraden Grad besitzen, was hier nicht der Fall ist, denn Knoten A und B haben ungeraden Grad.



b) In diesem Doppelhaus kann kein Euler-Weg gefunden werden, da *vier* Knoten (A, B, C und F) ungeraden Grad besitzen. Nach dem Satz von Euler hat ein zusammenhängender Graph aber genau dann einen Euler-Weg, wenn genau *zwei* Knoten ungeraden Grad haben.

Lösung zu Aufgabe 2. (Regelmäßiges Fünfeck)



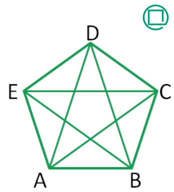
Da es sich bei dem abgebildeten Graphen um einen vollständigen Graphen handelt (d.h. jeder Knoten ist mit jedem anderen durch eine Kante verbunden), entsprechen die Hamilton-Kreise in diesem Graphen, die in A beginnen und enden genau den „Wörtern“der Länge 6, die mit A beginnen und enden und in denen B, C, D und E jeweils genau einmal auftreten. Daher gibt es genau $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, nämlich:

1) ABCDEA	2) ABCEDA	3) ABDCEA	4) ABDECA	5) ABEDCA	6) ABECDA
7) ACBDEA	8) ACBEDA	9) ACDBEA	10) ACDEBA	11) ACEBDA	12) ACEDBA
13) ADBCEA	14) ADBECA	15) ADCBEA	16) ADCEBA	17) ADEBCA	18) ADECBA
19) AEBCDA	20) AEBDCA	21) AECBDA	22) AECDBA	23) AEDBCA	24) AEDCBA

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

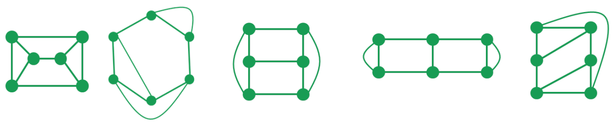
Lösung zu Aufgabe 3. (Hamilton-Wege) z.B.:
a) (FDCBG)RSHJKLMNPQXWVTY oder (FDCBG)RQPNMLKJHSYXWVT
b) (FDC)BGRQPNMLKJHSYXWVT
c) (QXYT)JHBGRS
d) (FDC)KLVTJHSYXWNPQRGB

Lösung zu Aufgabe 4. (Vollständige Graphen)



a) Ein vollständiger Graph mit fünf Knoten (siehe Bild) besitzt genau zehn Kanten.
b) Ein vollständiger Graph mit zehn Knoten besitzt genau 45 Kanten, denn:
Multipliziert man die Anzahl der Knoten mit der Anzahl der Kanten je Knoten, erhält man: $10 \cdot 9 = 90$.
Dieses Ergebnis muss noch durch zwei geteilt werden, da immer nur je eine Kante zwischen zwei Knoten existiert (egal ob z.B. von A nach C oder von C nach A)), also $90 : 2 = 45$
c) Ein vollständiger Graph mit n Knoten besitzt genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten, denn:
Jeder der n Knoten kann mit $n-1$ weiteren Knoten verbunden werden, wodurch der Term $n(n-1)$ entsteht. Da aber zwischen zwei Knoten jeweils nur eine Kante existiert, also nur eine Richtung berücksichtigt wird (ungerichteter Graph), muss man den Term $n(n-1)$ durch die Zahl 2 teilen.

Lösung zu Aufgabe 5. (Atlantis I)
a) Die sechs Staaten können als sechs Knoten und die Angrenzungen als Kanten dargestellt werden: Jeder der sechs Knoten hat den Grad drei, d.h. drei Kanten, die von ihm weg-/hinführen.
In der Abbildung unten sind fünf Möglichkeiten angegeben, wie der Graph des Kontinents Atlantis aussehen könnte:



b) Wir nehmen an, dass die Reiseteilnehmer jede Grenze zwischen zwei Staaten genau einmal überquerten. Dann würde dies im Graphen (Teilaufgabe a) bedeuten, dass jede Kante genau einmal durchlaufen wurde. Dies wäre ein Euler-Weg oder ein Euler-Kreis. Der Satz von Euler besagt jedoch, dass ein zusammenhängender Graph genau dann einen Euler-Weg oder einen Euler-Kreis hat, wenn genau zwei Knoten oder keine Knoten einen ungeraden Grad haben. Dies ist hier jedoch nicht der Fall, denn alle sechs Knoten haben ungeraden Grad. Es kann also nicht stimmen, dass die Reiseteilnehmer jede Grenze zwischen zwei Staaten genau einmal überquerten.

Lösung zu Aufgabe 6. (Atlantis II)
a) Um diesen Satz zu beweisen, ist es sinnvoll, sich zunächst den Zusammenhang zwischen der Gesamtanzahl aller Kanten und der Summe aller Knotengrade zu überlegen. Wir betrachten einen Graph mit n Knoten und m Kanten. Jede der m Kanten erhöht die Knotengrade der beiden Knoten, die durch die Kante verbunden sind, um jeweils 1. Also erhöht jede Kante die Summe aller Knotengrade um 2. Insgesamt gibt es also bei m Kanten eine Gesamtsumme der

Knotengrade von $2m$. Dies ist eine gerade Zahl.
Wir bezeichnen nun die Grade der n Knoten mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann gilt also: $2m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Auf der linken Seite steht eine gerade Zahl. In der Summe auf der rechten Seite muss also die Anzahl der ungeraden Summanden gerade sein, damit der Wert der Gesamtsumme gerade ist. Folglich enthält der betrachtete Graph immer eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad (auch 0 Knoten mit ungeradem Grad sind in dieser Aussage enthalten).
b) Übersetzt man die Aussage des Reisenden wieder in einen Graphen, erhält man einen Graphen mit sieben Knoten, die jeweils Grad 3, also ungeraden Grad besitzen. Dies widerspricht dem in Teilaufgabe a) bewiesenen Satz, dass in jedem Graph die Anzahl an Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Lösung zu Aufgabe 7. (Zusatzaufgabe – Eine Reise durch Deutschland)
Die kürzeste Route lautet:

Regensburg / Nürnberg / Erfurt / Dresden / Berlin / Hamburg / Frankfurt / Stuttgart / München / Regensburg (oder in umgekehrter Reihenfolge).
Sie hat eine Gesamtlänge von 2098 km.

Vielleicht seid ihr auf diese Route durch sinnvolles Probieren gekommen. Um sicher zu gehen, dass es sich hier auch wirklich um die kürzeste Route handelt, müssen aber alle möglichen Routen ausprobiert werden. Leider sind das sehr viele Möglichkeiten! Also geht es nicht ohne die Hilfe eines Computers. Und das wiederum klappt nur, wenn man Programmierkenntnisse besitzt.
Der Computer kann erstens sehr schnell rechnen und man kann ihn so programmieren, dass er systematisch vorgeht: Zunächst müssen im Computer alle Städte mit den Entfernungen zwischen den Städten gespeichert werden. Dann kann der Computer alle verschiedenen Reihenfolgen nacheinander ausprobieren. Für jede neue Kombination muss er sich die Route und die Entfernung merken. Am Ende überprüft man, bei welcher Route die Entfernung am kürzesten ist.