Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Lösungen zum Thema Invarianten

Lösung zu Aufgabe 1. Die Antwort ist *Nein.* Das kann man herausfinden, indem man die Anzahl der Buchstaben zählt. MEU ist drei Buchstaben lang, also ist die Wortlänge des ersten Wortes eine ungerade Zahl. Bei jeder erlaubten Umformung (R1), (R2), (R3) ändert sich die Wortlänge entweder gar nicht oder um zwei. Addiert oder subtrahiert man von einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl (z.B. zwei oder null), erhält man stets wieder eine ungerade Zahl. Da die Wortlänge von MU zwei ist, also eine gerade Zahl, kann man MEU nicht in MU umformen.

Lösung zu Aufgabe 2. Es ist *nicht* möglich, alle Becher richtig herum zu stellen. Es gibt nämlich beim Umdrehen der Becher genau drei Fälle: Dreht man zwei richtig stehende Becher um, so wird die Anzahl der kopfüber stehenden Becher um zwei größer. Wählt man einen richtig und einen kopfüber stehenden Becher, ändert sich die Anzahl der kopfüber stehenden Becher nicht. Und beim Umdrehen von zwei kopfüber stehenden Bechern wird die Anzahl der kopfüber stehenden Becher um zwei kleiner. Also ändert sich in jedem der drei Fälle die Anzahl der kopfüber stehenden Becher um eine gerade Zahl. Da zu Beginn eine ungerade Zahl an Bechern kopfüber steht (nämlich drei), bleibt die Anzahl der kopfüber stehenden Becher stets ungerade (eins, drei oder fünf). Also kann sie nie null werden.

Lösung zu Aufgabe 3. Bei einer 4×8 - Schokoladentafel sollte man *selbst* anfangen. Denn: Am Anfang hat man ein Stück (die ganze Schokoladentafel). Bricht man diese einmal beliebig entzwei, hat man zwei Stücke, bricht man eines davon wieder entzwei, hat man insgesamt drei Stücke, usw. Bei jedem Brechen erhöht sich die Anzahl der Stücke also um eins. Am Ende müssen es genau $4 \cdot 8 = 32$ Stücke sein. Da man zu Beginn bereits ein Stück hat (die ganze Tafel), gibt es also $32–1 = 31$ Spielzüge. Da dies eine ungerade Zahl ist, sollte man bei diesem Spiel selbst beginnen, um zu gewinnen.

Bei einer 3×7 - Tafel ist es genau umgekehrt. Hierbei gibt es am Ende $3 \cdot 7 = 21$ Stücke, also gibt es $21–1 = 20$ Spielzüge. Da dies eine gerade Anzahl an Zügen ist, sollte man dieses mal *nicht* beginnen, um zu gewinnen.

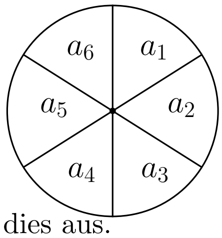
Lösung zu Aufgabe 4. Die letzte Murmel ist immer rot. Um dies zu erkennen, überlegen wir uns, wie sich die Anzahl an roten und grünen Murmeln im Beutel bei jedem der drei möglichen Fälle ändert:

Farbe der gezogenen Murmeln	**Änderung grüne M.**	**Änderung rote M.**
Grün & Grün	-1	0
Rot & Rot	$+1$	-2
Grün & Rot	-1	0

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Aus der Tabelle lassen sich zwei Dinge ablesen. Zum einen, dass sich die Gesamtanzahl der Murmeln im Beutel bei jedem Zug um eins verringert. Deshalb ist nach zehn Zügen nur noch eine Murmel im Beutel. Um herauszufinden, dass diese rot sein muss, lesen wir aus der Tabelle ab, dass sich die Anzahl der roten Murmeln in jedem der drei Fälle um eine *gerade* Anzahl ändert (null oder zwei). Da anfangs fünf rote Murmeln im Beutel sind, also eine ungerade Anzahl, bleibt die Anzahl an roten Murmeln stets ungerade. Ist also nach dem zehnten Zug nur noch eine Murmel im Beutel, so muss diese rot sein.

Lösung zu Aufgabe 5. Die Antwort lautet Nein. Ein möglicher Trick, um dies zu zeigen, ist folgendes. Wir benennen die Zahlen in den Kuchenstücken im Uhrzeigersinn mit a_1 bis a_6 wie in nebenstehendem Bild und betrachten folgenden Term:



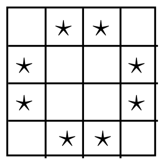
$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \,.$$

Der Witz ist, dass sich der Wert dieses Terms nicht ändert, wenn man zwei benachbarte Zahlen um eins erhöht. S ist also eine *Invariante*. Dies liegt daran, dass zwei benachbarte Zahlen im Term S verschiedene Vorzeichen haben. Wenn man also z.B. a_3 und a_4 jeweils um eins erhöht, gleicht sich dies aus. Setzt man die Zahlen aus der Aufgabenstellung in S ein, so erhält man als Ergebnis

$$S = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2 \,.$$

Da sich der Wert von S nicht ändert, bleibt dieser bei jeder Umformung 2. Wären dagegen alle Zahlen im Kreis gleich, so würde man $S = 0$ herausbekommen. Deshalb kann man *nicht* erreichen, dass irgendwann in jedem Feld die gleiche Zahl steht, wenn zu Beginn die Zahlen wie im Aufgabenbild angeordnet sind.

Lösung zu Aufgabe 6. Die Antwort lautet Nein. Um dies einzusehen, kann man z.B. untersuchen, wie sich die Farben der mit einem Sternchen gekennzeichneten Felder im nebenstehenden Bild unter den erlaubten Umfärbungen ändern. Wir gehen die drei möglichen Umfärbungen durch:



1. Jede Reihe enthält genau zwei Sternchen-Felder. Sind vor dem Umfärben entweder beide schwarz oder beide weiß, so ändert sich die Anzahl der schwarzen Sternchen-Felder beim Umfärben um zwei. Ist eins der beiden Felder schwarz und das andere weiß, so ändert sich die Anzahl der schwarzen Sternchen-Felder beim Umfärben einer Reihe nicht.

2. Auch jede Spalte enthält zwei Sternchen-Felder. Deshalb ändert sich die Anzahl der schwarzen Sternchen-Felder beim Umfärben einer Spalte ebenfalls entweder um zwei oder bleibt gleich.

3. Jede Diagonale und jede Nebendiagonale enthält entweder gar keine Sternchen-Felder oder sie enthält zwei Sternchen-Felder. Deshalb ändert sich die Anzahl der schwarzen Sternchen-Felder beim Umfärben einer Diagonale oder Nebendiagonale entweder gar nicht oder um zwei.

Insgesamt sehen wir also, dass sich bei jeder erlaubten Umfärbung die Anzahl der schwarzen Sternchen-Felder entweder um zwei oder überhaupt nicht ändert (also immer um eine gerade Zahl). Da zu Beginn genau eins der Sternchen-Felder schwarz ist (also eine ungerade Anzahl), ist es deshalb nicht möglich, dass irgendwann gar keins der Sternchen-Felder mehr schwarz ist (also eine gerade Anzahl). Dann kann man aber natürlich auch nicht erreichen, dass irgendwann überhaupt kein Feld auf dem Brett mehr schwarz ist.